Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

61e jaargang
1985/1986
november

Euclides 3

Wolters-Noordhoff

Euclides

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter Dr Th. J. Korthagen, Torenlaan 12, 7231 CB Warnsveld, tel. 05750-2 34 17.
Secretaris Drs J. W. Maassen, Traviatastraat 132, 2555 VJ Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie F. F. J. Gaillard, Jorisstraat 43, 4834 VC Breda, tel. 076-65 32 18. Giro: 143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.

De contributie bedraagt *f* 50,– per verenigingsjaar; studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de V.V.W.L. *f* 35,–; contributie zonder Euclides *f* 30,–.
Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester. Opzeggingen vóór 1 juli.

Artikelen en mededelingen worden in drievoud ingewacht bij Drs F. H. Dolmans, Heiveldweg 6, 6603 KR Wijchen, tel. 08894-1 17 30. Zij dienen met de machine geschreven te zijn met een marge van 5 cm en een regelafstand van 1½. De auteur van een geplaatst artikel ontvangt kosteloos 5 exemplaren van het nummer waarin het artikel is opgenomen.

Boeken ter recensie aan Drs W. Kleijne, Treverilaan 39, 7312 HB Apeldoorn, tel. 055-55 08 34.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan F. J. M. Doove, Severij 5, 3155 BR Maasland. Giro: 1609994 t.n.v. NVvW leesportefeuille te Maasland.

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 44,75. Een collectief abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement *f* 26,50.
Niet-leden kunnen zich abonneren bij:
Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 567, 9700 AN Groningen, tel. 050-22 68 86. Giro: 1308949.
Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen.
Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag.
Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.
Losse nummers *f* 7,50 (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).



ISSN 01.65-0394

Interpretatie en evaluatie van het tweede wiskunde projekt

Harrie Broekman, Johan M. J. Weterings

An actual table describing human affairs changes from science into history before it can be set in type.

Lee J. Crombach

Het bovenstaande citaat van Lee J. Crombach geeft o.i. een van de problemen aan van het *interpreteren* en het *evalueren* van de 'uitkomsten' van het tweede wiskunde projekt.
Een tweede probleem komt voort uit het feit dat men in eerste instantie niet geïnteresseerd is in de feiten an sich, maar vooral in de interpretaties en de vaststelling van het onderwijskundig belang van de beschreven en geïnterpreteerde gebeurtenissen/feiten.

Wat denkt u als lezer bijvoorbeeld van de volgende twee citaten:

Zakrekenmachines (zowel de eenvoudige als de wetenschappelijke) worden in het wiskunde-onderwijs in tweede klas V.O. anno 1981 nauwelijks gebruikt (tabel 21), hetgeen mede zal samenhangen met het beleid van de wiskunde-sectie: in het merendeel van de scholen mag de zakrekenmachine niet in de klas worden gebruikt (zie tabel 22).
Beschrijving van uitkomsten, pag. 29.

Ongeveer 1/5 van de leerlingen zegt anno 1981 gebruik te maken van een rekenliniaal (tabel 32). Onzeker is echter of er van verwarring met een liniaal sprake is. De zakrekenmachine wordt door ca. 1/3 van de leerlingen vooral thuis gebruikt. Tijdens de wiskundeles wordt weinig van een zakrekenmachine gebruik gemaakt. De zakrekenmachine wordt gebruikt voor uiteenlopende aktiviteiten (tabel 33), maar het meest bij het controleren van antwoorden en het maken van huiswerk.
Idem, pag. 33.

Behalve het gegeven dat we hier lezen over de onderzochte situatie in 1981, en er misschien verwarring is rond de rekenliniaal, hebben wij onvoldoende mogelijkheden om de gegevens te interpreteren. Het vaststellen van het onderwijskundig belang – het geven van een antwoord op bijvoorbeeld de vragen '*wat is de invloed van de ouders op het gebruik van zakrekenmachines*', '*welke invloed heeft een verbod van het gebruik op school*', '*bij welke onderdelen van de wiskunde is het gebruik aan te bevelen*', etc., etc. – is hiermee o.i. geheel onmogelijk. Maar misschien zoeken wij wel de verkeerde dingen in deze 'beschrijving van uitkomsten' en moeten we terug naar de inhoud en dan vooral dat deel waarin staat voor wie het rapport bedoeld is.

Dit rapport is bedoeld voor al diegenen die hetzij direct danwel indirect in de praktijk van het wiskunde-onderwijs werkzaam zijn. De belangrijkste functie van dit rapport is het ontsluiten van een omvangrijk gegevensbestand. Daarnaast kan dit rapport een naslagfunctie hebben. Vrijwel alle verzamelde gegevens worden in dit rapport, uitgesplitst naar schooltype gepresenteerd. In de begeleidende tekst worden duidelijke trends in het materiaal gesignaleerd. Daarnaast spreken echter de tabellen in belangrijke mate voor zich en zullen de lezer, afhankelijk van eigen ervaringen, bepaalde aspecten opvallen.
Idem, pag. 4.

De laatste zin geeft aan dat wij als wiskundedidaktici en als lerarenopleiders er andere dingen in kunnen en mogen lezen, maar met het gelezene ook andere dingen kunnen gaan doen, dan een wiskunde leraar van de lts hier vlak bij. Maar ook iets anders dan de minister van onderwijs die een beslissing moet nemen over het wel of niet verplichten van wiskunde voor alle vwo leerlingen (en alle havo, mavo, lbo leerlingen?).

Om beiden – de leraar[1] én de minister – iets leesbaars aan te bieden lijkt het ons aardig om eens te zien welke wiskunde-onderwerpen door de leraren aangegeven worden als 'belangrijk' en dit te vergelijken met het aantal opgaven in de toetsen hierover (§ 1).

Geïnspireerd door de uitkomsten van een groot Engels onderzoek van het zgn. Cockcroft Committee willen wij in § 2 iets zeggen over het onderdeel 'rekenen'.
In § 3 zullen wij vervolgens aandacht besteden aan enkele punten uit 'aspecten van meetkunde-onderwijs', aangezien wij – net als de Nationale Begeleidings Commissie – vinden dat de belangstelling voor neetkunde-onderwijs versterkt dient te worden.
Het bestuderen van de items uit de gehanteerde toetsen maakte ons argwanend ten aanzien van de waarde van de scores. Daar zijn wij in een vorig artikel (*Euclides* 61, 2) op ingegaan. We hebben daarin aandacht besteed aan een van de gehanteerde onderzoeksinstrumenten, nl. de kern-toets. We deden dit door uit te gaan van een o.i. vergelijkbare situatie, het proefwerk.
Verder hebben we in dat artikel een korte aanduiding gegeven van een mogelijk gebruik, in de lerarenopleiding, van een klein deel van de grote hoeveelheid gepubliceerde gegevens (tabellen, etc.).

1 Als belangrijk aangegeven onderwerpen

Vragen
Wordt aan de door de leraren *belangrijk* gevonden onderwerpen ook de meeste *tijd* besteed? Vinden de toetsconstructeurs – gezien het aantal en de inhoud van de toetsvragen – dezelfde onderwerpen belangrijk als de leraren?

Antwoord
Deze vragen zijn met het beschreven materiaal niet of slechts zeer ten dele te beantwoorden.

Toelichting
Uit de opvattingen van docenten blijkt in welke wiskunde-onderwerpen het lesgeven als belangrijk, moeilijk en leuk ervaren wordt (zie tabel 16 in bijlage 3). Lesgeven over het controleren van antwoorden op een vraagstuk door het nog eens na te gaan, het oplossen van tekstopgaven, het oplossen van vergelijkingen en meetkundige figuren wordt door docenten in alle vier schooltypen belangrijk gevonden.
Docenten in het avo vinden een onderwerp zoals het oplossen van ongelijkheden duidelijk belangrijker dan lbo-docenten. De laatste groep daarentegen hecht meer dan de avo-docenten belang aan het lesgeven over eenheden, en het maken van opgaven waarin tiendelige breuken voorkomen en het informatie halen uit statistieken. Idem, pag. 27.

Het is ons door de andersoortige categorieën niet mogelijk te zien of er een verband is tussen het '*belangrijk gevonden worden*' en de '*er aan bestede tijd*'. De vraag '*hoe*' die tijd besteed werd is helemaal niet te beantwoorden, maar dat is kennelijk niet de bedoeling, anders was er o.i. wel naar gevraagd. Alhoewel... hoe moet je dat in getalletjes (percentages) vastleggen?
Onze kritiek op dit deel van het onderzoek gaat echter dieper[2] maar we willen volstaan met het hiervoor aangeduide, nl. dat de onderzoekers een niet duidelijk onderscheid maken tussen '*wiskunde onderwerpen*' en '*mogelijke onderdelen van de wiskundeles*'. Een analyse van de gegeven antwoorden wordt verder ook nog bemoeilijkt door het meerduidige taalgebruik in de lijst *mogelijke onderdelen* (b.v. 30 Controleren van het antwoord op een vraagstuk door het nog eens na te gaan). Anders gezegd: wat moeten we er precies onder verstaan? Bij 30 b.v. kun je er al het 'bespreken' van huiswerkopgaven onder verstaan, maar ook het de leerlingen leren van een manier om zichzelf te controleren, of – weer iets anders – het aanleren van een 'controle-houding'.
Een poging om na te gaan of het aantal opgaven in de diverse toetsen (kern-toets, A-toets, etc.) over een door de leraren belangrijk gevonden onderdeel overeenkomt met het toegeschreven belang loopt opnieuw spaak op de veelzijdig te interpreteren omschrijvingen.
En dat is o.i. heel jammer want we kunnen daardoor nauwelijks nagaan of hetgeen de leraren belangrijk vinden ook door de toetsconstructeurs belangrijk gevonden wordt.
Helemaal waar is dit natuurlijk niet, want het lijkt er in ieder geval op dat zowel de leraren als de toetsconstructeurs tekstopgaven – ruim opgevat – van belang vinden (13 van de 40 opgaven van de kerntoets). Hierbij nemen wij wel aan dat de toetsconstructeurs die vragen stellen die zij belangrijk vinden.

De 67% lto leraren en de 88% lhno leerkrachten die het *informatie halen uit statistieken* belangrijk vinden zullen – wat dit punt betreft – wel problemen hebben met het geringe aantal opgaven hierover (als we onder 'statistieken' verstaan 'tabellen', 'diagrammen' en 'grafieken' 6 van de 74 vragen per leerling).

Bijlage 3

		havo/vwo % (n = 60)	mavo % (n = 70)	lto % (n = 57)	lhmo % (n = 49)
30 Controleren antwoord	Belangrijk	92	90	95	92
	Geen mening	5	3	5	2
	Onbelangrijk	2	4	0	5
	Geen antwoord	2	3	0	0
33 Tekstopgaven	Belangrijk	73	70	88	70
	Geen mening	17	20	12	16
	Onbelangrijk	8	7	0	14
	Geen antwoord	2	3	0	0
34 Vergelijkingen oplossen	Belangrijk	100	94	91	90
	Geen mening	0	3	5	8
	Onbelangrijk	0	0	4	2
	Geen antwoord	0	3	0	0
36 Lessen over meetkundige figuren	Belangrijk	72	84	98	90
	Geen mening	23	6	2	10
	Onbelangrijk	5	7	0	0
	Geen antwoord	0	3	0	0

Het is jammer dat de bovenstaande antwoordpercentages op de vragen naar de *mening betreffende het lesgeven in de onderzoekklas over mogelijke onderdelen van de wiskundeles* niet vergeleken kunnen worden met de antwoorden op vraag 27 (vraag naar geschatte hoeveelheid lesuren besteed aan een aantal wiskunde-onderwerpen). In vraag 27 komen namelijk het 'controleren van antwoorden van vraagstukken' etc. niet als aparte onderwerpen voor. Wel komen vragen voor als:

F.1 Meetkunde, vlakke figuren, definities en eigenschappen
Geschat aantal lesuren —
Wijze van behandeling:
- eenmalig aaneengesloten in dit schooljaar [1]
- behandeling en later in het schooljaar op terugkomen [2]

F.2 Meetkunde, transformaties, congruentie
Geschat aantal lesuren —
Wijze van behandeling:
- eenmalig aaneengesloten in dit schooljaar [1]
- behandeling en later in het schooljaar op teruggekomen [2]

F.3 Meetkunde, overige onderwerpen (b.v. gonio, gelijkvormigheid, ruimtefiguren)
Geschat aantal lesuren —
Wijze van behandeling:
- eenmalig aaneengesloten in dit schooljaar [1]
- behandeling en later in het schooljaar op terugkomen [2]

G. Formules en vergelijkingen (b.v. formules opstellen, substitutie, veeltermen, merkwaardige produkten, vergelijkingen, ongelijkheden)
Geschat aantal lesuren —
Wijze van behandeling:
- eenmalig aaneengesloten in dit schooljaar [1]
- behandeling en later in het schooljaar op terugkomen [2]

Idem, bijlagen, pag. 148/9.

Samenvattend: onze poging om een verband te vinden tussen
a het door de leraren al of niet belangrijk vinden van mogelijke onderdelen van de wiskundeles en
b de hoeveelheid tijd besteed aan een aantal wiskunde onderwerpen en
c het aantal opgaven in de toets over de genoemde onderdelen

mislukt door de wijze waarop de onderzoekers onderscheid maken tussen 'wiskundige onderwerpen' en 'mogelijke onderdelen van de les'. Tevens zijn vele van de 'mogelijke onderdelen' in dusdanige bewoordingen gesteld dat het onduidelijk is welke toetsvragen op deze onderdelen betrekking hebben. Maar misschien zoeken wij opnieuw antwoord op verkeerde vragen en moeten wij de tabellen *in belangrijke mate voor zichzelf* laten spreken?

2 Het rekenen

In een samenvatting van de secretaris van het Cockcroft Committee van het door hen in 1982 uitgebrachte rapport 'Mathematics Counts' lezen we:

The Committee concluded that it is possible, in broad terms, to sum up much of the mathematical needs of adult life as 'a feeling for number' and much of the mathematical needs of employment as 'a feeling for measurement'. Underlying both of these, and essential to their development, is the need to establish – while at school – confidence in the use of mathematics.

Veel van hetgeen onder *'feeling for number'* verstaan wordt komt op de basisschool aan bod en misschien is er mede daarom niet expliciet naar gevraagd in de lerarenvragenlijst - deel B (belang bij lesgeven, etc.).
Op grond van hetgeen de leraren opgaven, t.a.v. de aan een aantal onderwerpen bestede tijd, schrijven de onderzoekers over het hoofdonderwerp rekenen:

Over dit hoofdonderwerp (zie tabel 36, bijlage 3) wordt in de eerste twee leerjaren van het voortgezet onderwijs slechts in beperkte mate les gegeven. Opvallend is dat als het gaat om de natuurlijke getallen en breuken op het avo hier slechts systematisch aandacht aan wordt besteed, als het de sub-onderwerpen voorstelling op getallenlijn en eigenschappen van bewerkingen tussen deze getallen betreft. Op het lbo daarentegen is er tevens expliciet aandacht voor het rekenen met deze getallen (met name breuken).
Machten en exponenten van natuurlijke getallen worden alleen op avo behandeld, terwijl er ook alleen op dit schooltype incidenteel aandacht is voor andere dan tientallige talstelsels. Aan de tweede machtswortel wordt op het avo door alle leerlingen aandacht besteed, terwijl dit op lbo afhankelijk is van de methode. Tenslotte zij vermeld dat alleen op het lbo incidenteel aandacht wordt besteed aan het rekenen in eenheden (bijv. gewichten, afstandsmaten).

In de kerntoets en in de toetsen A t/m D komt een flink aantal 'reken'-opgaven voor, zodat we kunnen concluderen dat de toetsconstructeurs het rekenen een relatief groot belang toekennen.
De resultaten van de leerlingen op de diverse vragen geven een indicatie van de problemen die de leerlingen lijken te hebben. Wat denkt u bijvoorbeeld van de percentages leerlingen die een goed antwoord geven op resp. vwo/havo, mavo, lto en lhno bij de volgende vragen?

Kerntoets 14
In welk van onderstaande antwoorden zijn de twee breuken van gelijke waarde?
A. $\frac{5}{8}$ en $\frac{1}{3}$
B. $\frac{5}{6}$ en $\frac{2}{3}$
C. $\frac{4}{5}$ en $\frac{14}{15}$
D. $\frac{3}{5}$ en $\frac{9}{15}$
E. $\frac{1}{2}$ en $\frac{14}{24}$ *percentage resp. 97–89–76–67*

Kerntoets 17
$\frac{2}{5} + \frac{3}{8}$ is gelijk aan
A. $\frac{5}{13}$
B. $\frac{5}{40}$
C. $\frac{6}{40}$
D. $\frac{16}{15}$
E. $\frac{31}{40}$ *percentage resp. 91–61–51–30*

Toets B 27
Vier bekers van 1 liter, gevuld met roomijs, werden klaargezet voor een feestje. Na afloop van het feestje was 1 beker leeg, 2 waren half vol en 1 was driekwart vol. Hoeveel liter roomijs is er OPGEGETEN?
A. $3\frac{3}{4}$
B. $2\frac{3}{4}$
C. $2\frac{1}{2}$
D. $1\frac{3}{4}$
E. geen van bovenstaande antwoorden
percentage resp. 64–38–30–17

Vooral de percentages juiste antwoorden op vraag B27 bevreemden ons, omdat we van mening zijn dat juist door het plaatsen in een context deze opgave voor de leerlingen veel concreter[3] is dan de vragen K14 en K17. Zit het probleem dan toch in de taal die gebruikt wordt? Anders gezegd: meten we mèt deze opgave meer het kunnen vertalen van een 'verhaaltje' in een 'rekenopgave'? Dit lijkt inderdaad gesuggereerd te worden door de percentages leerlingen die b.v. alternatief B kiezen (resp.15-32-31-33), maar vooral ook alternatief D (resp. 15-20-22-24). Deze keuzes doen ons vermoeden dat er voor veel leerlingen verwarring is tussen 'op zijn', 'leeg zijn', 'vol zijn' en 'over zijn'. Bij controle door een aantal melkpakken voor leerlingen te zetten en de vraag hiervoor te stellen, vroegen meerdere kinderen (10 tot 12 jaar) of ze uit moesten rekenen hoeveel er nog over was. Dit ondanks het feit dat hun gevraagd werd hoeveel melk er opgedronken was.[4]

Na alleen een hardop herhalen van de opgave werd deze toch door vrijwel alle kinderen goed opgelost.

Op grond van het voorgaande kunnen we geen harde conclusies trekken. Wel willen we het vermoeden uitspreken dat de keuze van een contextopgave niet zonder meer een beter resultaat oplevert. Integendeel; de keuze van contextopgaven (tekstopgaven) kan het de leerlingen moeilijker maken tot een goede oplossing te komen als de gehanteerde taal dusdanig is dat de leerlingen belemmerd worden in het zich 'voor kunnen stellen' van de situatie. Dit klemt te meer als de situatie die ze zich voor moeten stellen niet 'realistisch' is. Maar wat meten we dan eigenlijk?
Een tweede vermoeden dat we uit willen spreken betreft de 'bekendheid' van dit soort opgaven. Ondanks het vele werk van Wiskobas en anderen komt de vernieuwing van het reken-wiskundeonderwijs voor 4 tot 12 jarigen vrij langzaam op gang. Een gevolg hiervan is dat het rekenen nog vaak plaats vindt aan de hand van 'kale opgaven' zonder steunpunten voor het denken vanuit realistische situaties. Voor veel van de getoetste leerlingen zullend deze opgaven 'nieuw' geweest zijn. Het is dan ook niet verwonderlijk dat ze daar minder goed scoren.

3 Aspecten van meetkunde-onderwijs

Uit de rapportering over IEA-onderzoekingen in Nederland blijkt dat de internationaal vastgestelde meting van behandelingswijzen van onderwerpen tot moeilijk interpreteerbare resultaten leidt. Het verdient daarom aanbeveling de behandelingswijzen in Nederland nader te onderzoeken, aan de hand van een instrument dat gebaseerd is op de Nederlandse wiskundeboeken.
Stelling 5 bij het proefschrift van Hein Krammer.

In Nederland werd gekozen voor de cross-sectionele component van het onderzoek (momentopname; HB; JW) maar tevens werd het interessante karakter van de onderwerp-specifieke vragenlijsten erkend. Hierbij speelden diverse aspecten een rol: op welke wijzen wordt een onderwerp onderwezen?, in hoeverre volgt een docent daarbij het door hem gebruikte leerboek?, welke meningen hebben docenten ten aanzien van het onderwijs over deze onderwerpen?, etc. Kortom, opname van de onderwerp-specifieke vragenlijsten in het Nederlandse aandeel van het TWP als extra activiteit, werd relevant gevonden.
Aspecten van Meetkunde-onderwijs, pag. 7.

Zoals Hein Krammer in zijn stelling 5 al stelde moeten we ons meer richten op de Nederlandse situatie willen we de verzamelde gegevens niet alleen beter kunnen interpreteren, maar ook evalueren (d.w.z. de waarde bepalen van en voor ons onderwijs). De onderdelen van de meetkunde vragenlijst leken ons in dat opzicht veelbelovend.

I instructiematerialen
II hulpmiddelen
III onderwerpen (translaties; de stelling: de som van de hoeken van een driehoek is 180 graden; de stelling van Pythagoras; congruentie van driehoeken; gelijkvormigheid van driehoeken; evenwijdige lijnen)
IV behandelingswijzen
V mening (opinie over enkele aspecten en doelstellingen van het meetkunde onderwijs)

We moeten u als lezer echter teleurstellen als u een antwoord verwacht op de vraag welke instructiematerialen en hulpmiddelen een docent gebruikt bij bijvoorbeeld het onderwijzen van de stelling van Pythagoras, en of dit én de keuze van behandelingswijze(n) iets te maken heeft met zijn opinie over een aantal 'aspecten en doelstellingen' van het meetkunde-onderwijs. Ook nu weer geldt dat het gepubliceerde materiaal het beantwoorden van dit soort-praktijknabije-vragen niet toestaat. Jammer!

Betekent dat nu dat dit deel van het onderzoek verder onbesproken kan blijven, of is uit de wel verzamelde gegevens iets te concluderen dat de moeite van het vermelden waard is? *Wij* denken dat er het een en ander te concluderen is; alleen nauwelijks in verband met het soort vragen dat wij graag willen stellen. Daarbij komt nog dat het soort conclusies dat we wel kunnen trekken sterk afhangt van de intentie waarmee we naar de gepresenteerde gegevens kijken (de bril die we opzetten). Anders gezegd: er is geen waarde-vrije manier van kijken, laat staan interpreteren en evalueren.
Dit laatste punt – het mogelijk zijn van meerdere interpretaties en evaluaties – willen we toelichten aan de hand van de vraag naar de '*belangrijkheid van behandelingswijzen*'. Vervolgens willen we ook nog – samen – kijken naar het effect van de vermelde '*ideeën over doelstellingen*' op de gekozen '*behandelingswijzen*.'

Belangrijkheid van de behandelingswijzen

Als leraar kies je uit de jou bekende manieren van behandelen van een onderwerp een of meerdere behandelingswijzen. Om er achter te komen of de deelnemende leraren de door hen gekozen behandelingswijzen belangrijk vinden, is daar in het onderzoek naar gevraagd. In het verslag lezen wij daarover o.a. het volgende:

Om de vraag naar de belangrijkheid van de behandelingswijzen te beantwoorden, moeten we tabel 7 beschouwen. Daarin staat per onderwerp weergegeven welk percentage van de gebruikte behandelingswijzen door de docenten (gemiddeld) belangrijk gevonden wordt bij de behandeling van het betreffende onderwerp aan leerlingen van de eerste twee leerjaren.
In tabel 7 wordt dus in tamelijk algemene zin iets gezegd over de vraag, hoe belangrijk docenten de door hen gebruikte behandelingswijzen vinden.

Tabel 7: Gemiddeld percentage van de gebruikte behandelingswijzen dat belangrijk gevonden wordt

	havo/vwo	mavo	ito	lhmo
Translaties	80	93	95	95
Som hoeken driehoek	75	77	90	85
Pythagores	71	76	84	97
Congruentie	78	80	91	80
Gelijkvormigheid	53	75	96	75
Evenwijdige lijnen	70	78	96	77

Opvallend in deze gegevens is, dat op havo/vwo bij elk onderwerp gemiddeld het minste belang aan de gebruikte behandelingswijzen wordt gehecht.
Aspecten van het meetkunde-onderwijs, pag. 24.

Onze eerste reaktie op het hier vermelde citaat is er een van schrik. Hebben de docenten van havo/vwo echt niet door dat het van wezenlijk belang is welke behandelingswijze je kiest? Voor de opbouw van het leerproces is het immers van groot belang of een concrete behandelingswijze gekozen wordt of een

		mening	havo/vwo	mavo	lto	lhno
88	Het doel van meetkunde-onderwijs in de eerste twee leerjaren is leerlingen situaties voor te leggen, waarin ze formeel iets moeten aantonen terwijl ze er intuïtief al een begrip van hebben.	eens	55	62	62	62
		geen mening	21	20	13	21
		oneens	24	18	25	17
89	Het is wenselijk dat meetkundige begrippen worden aangeboden in een volgorde, die bepaald is door een axiomatische benadering.	eens	29	18	34	26
		geen mening	21	30	28	15
		oneens	50	52	38	60
90	Een intuïtieve benadering heeft meer betekenis voor leerlingen uit de onderzoekklas dan een formele benadering.	eens	79	84	79	79
		geen mening	5	10	11	15
		oneens	26	6	9	6
92	Het gebruik van concrete modellen en leermiddelen is essentieel bij het meetkunde onderwijs in de eerste twee leerjaren.	eens	61	80	83	85
		geen mening	21	12	11	11
		oneens	18	8	6	4
100	De behandeling van de bewijzen van stellingen moet een wezenlijk onderdeel zijn van het meetkunde-onderwijs voor deze leerlingen.	eens	29	11	9	11
		geen mening	20	20	9	11
		oneens	51	70	82	78
102	Bewijzen van stellingen dienen pas behandeld te worden als de leerlingen minstens 15 jaar zijn.	eens	22	41	41	36
		geen mening	24	23	26	23
		oneens	54	37	33	41

Tabel 12: Overzicht voldoende gebruikte combinaties behandelingswijzen bij de som van de hoeken van een driehoek (per schooltype).

combinatie van behandelingswijzen	havo/vwo N = 56		mavo N = 65		lto N = 46		lhno N = 27	
	f	%	f	%	f	%	f	%
38	–	–	–	–	3	7	6	22
38 + 39	12	21	6	9	–	–	–	–
38 + 39 + 40	–	–	–	–	3	7	–	–
38 + 39 + 40 + 41 + 44	–	–	–	–	3	7	–	–
38 + 39 + 41	–	–	–	–	3	7	–	–
38 + 39 + 41 + 44	3	5	4	6	–	–	–	–
38 + 39 + 41 + 44 + 46	3	5	4	6	–	–	–	–
38 + 39 + 44	4	7	–	–	–	–	–	–
38 + 39 + 44 + 46	–	–	9	14	–	–	–	–
38 + 39 + 46	4	7	3	5	–	–	–	–
38 + 40	–	–	–	–	3	7	4	15
38 + 40 + 46	–	–	–	–	3	7	–	–
38 + 41	–	–	–	–	3	7	3	11
39	–	–	3	5	–	–	–	–
39 + 41	–	–	3	5	–	–	–	–
39 + 44	3	5	3	5	–	–	–	–
39 + 44 + 46	–	–	3	5	–	–	–	–
39 + 46	3	5	–	–	–	–	–	–

38 Metend en optellend ontdekken.
39 Met lijn door de tophoek evenwijdig aan de basis (Z-hoeken).
40 Door hoeken af te knippen.
41 Door te stellen en laten controleren door te rekenen.
44 Lijn door hoekpunt evenwijdig aan overstaande zijde (F,Z-hoeken).
46 Door driehoek op te bouwen uit twee halve rechthoeken.

Idem, pag. 40

Opmerking bij tabel 12: – aantallen kleiner dan 3 zijn weggelaten, daarvoor zij verwezen naar bijlage 5.

meer abstracte. Of – als er meer behandelingswijzen gekozen worden – welke behandelingswijze eerst gekozen wordt, de meer concrete of de meer abstracte? Hebben ze dan echt nooit van de Van Hiele nivo's gehoord?

Bij het verder doorspitten van de gepresenteerde gegevens komen we er achter dat eigenlijk nergens vermeld staat in welke volgorde de verschillende behandelingswijzen door de docenten gebruikt werden.

We krijgen zelfs het gevoel dat we *opgelucht adem kunnen halen* wat betreft de havo/vwo docenten. De gegevens zijn namelijk ook anders te interpreteren: de havo/vwo docenten hebben in de gaten dat bij een aantal onderwerpen de behandeling best anders kan.

Onze interpretatie hangt dus kennelijk af van de manier waarop we naar de gegevens kijken.

Welke interpretatie nu de juiste is? U mag het ons zeggen.

Zo mag u ons ook helpen om iets te zeggen over het effect van de vermelde '*ideeën over doelstellingen*' op de gekozen '*behandelingswijzen*'.

Ideeën over doelstellingen en gekozen behandelingswijzen

Uit deel V van het onderzoek, getiteld *Uw mening* (Idem, pag. 121), kiezen wij de hier volgende uitspraken èn de percentages leraren van de onderscheiden schooltypen die kozen voor de antwoordmogelijkheden: geheel eens, eens, geen mening, oneens, geheel oneens. Bij de weergave van de antwoorden hebben de onderzoekers de eerste twee categorieën en de laatste categorieën samengevoegd tot respectievelijk 'eens' en 'oneens'.

Wat denkt u zelf bij vraag 88?

Bent u het met die stelling eens, omdat het uws inziens het juiste doel is?

Het voorgeschreven doel is?
Of omdat het onderwijs daar gewoon vaak op lijkt?

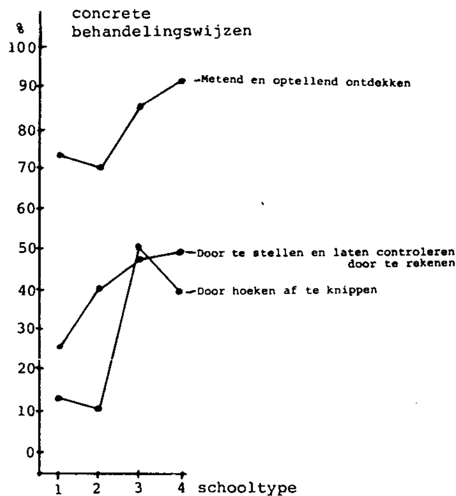
Wat wij met deze vragen aan u willen aangeven is het volgende:
er kunnen allerlei verschillende motiveringen achter één antwoord schuil gaan.
Maar er is meer:
we kunnen uit de antwoorden niet afleiden of de gegeven mening ook werkelijk iets betekent voor de manier waarop het onderwijs gegeven wordt.

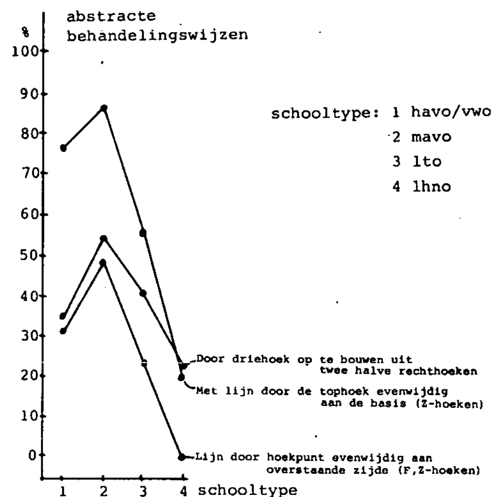
lingswijzen 38, 40 en 41 als 'concreet' typeren en de behandelingswijzen 39, 44 en 46 als 'abstract'.

Tenslotte geven de auteurs grafisch het gebruik weer, per schooltype, van de afzonderlijke behandelingswijzen. Ze maken daarbij het onderscheid concreet/abstract, maar laten de vrijwel niet gekozen drie behandelingswijzen weg.

[Vergelijk figuur 8 pag. 43; Kuper en Pelgrum 1983]

Figuur 8: Percentage docenten dat gebruik maakt van concrete resp. abstracte behandelingswijzen bij het onderwerp: de som van de hoeken van een driehoek is 180 graden.





Heeft uw keuze voor een antwoord bij vraag 88, 90, 92 iets te betekenen voor bijvoorbeeld uw keuze van een behandelingswijze van de stelling 'de som van de hoeken van een driehoek is 180°'?
De koppeling tussen enerzijds de geformuleerde doelstellingen/meningen en anderzijds behandelingswijze(n) van diverse onderwerpen is beslist niet altijd even eenvoudig. Ook in dit geval niet.
De leerlingen hebben immers nog geen intuïtief begrip van 'de som van de hoeken van een driehoek'. Een vaag idee daarover moeten ze nog krijgen en daarvoor hebben we bijvoorbeeld de beschikking over een aantal concrete werkwijzen.
Worden die concrete werkwijzen door de deelnemende leraren daar ook voor gebruikt?
Een volledig antwoord op die vraag is niet te geven, maar tabel 12 uit het verslag (pag. 40) geeft wel enig idee als we bedenken dat de auteurs de behande-

Een probleem dat wij hierbij willen signaleren is dat wij op grond van vele jaren contact met leraren moeite hebben met het feit dat zo'n hoog percentage van de deelnemende leraren aangegeven hebben drie of meer behandelingswijzen te gebruiken (zie voorgaande tabel 12).
Maar ook als de leraren de vraag juist beantwoord hebben, weten wij helaas niets over de *volgorde* van behandeling. En juist die volgorde zou iets zeggen over het daadwerkelijk gegeven onderwijs en zou het mogelijk maken iets te concluderen over een mogelijk verband tussen '*mening/doelstelling*' en '*gekozen behandelingswijze*'.

Er is nog *één probleem* dat wij willen signaleren. Het komt nogal eens voor dat leraren de stelling over de som van de hoeken van een driehoek gebruiken om met de leerlingen te werken aan: *onderzoeken* –

hypothese opstellen – hypothese toetsen – en eventueel *hypothese bewijzen*.
Het is jammer dat dit soort problemen – interessant en leerzaam voor leraren, lerarenopleiders en leerplanontwikkelaars – door de manier waarop het onderzoek heeft plaatsgevonden en gerapporteerd is, niet nader bekeken kunnen worden. De volgorde van behandelingswijzen is immers niet bekend!
Anders gezegd: *er worden in het gepubliceerde materiaal veel feiten en gegevens aangedragen, maar het verband tussen die feiten en gegevens is o.i. moeilijk aan te geven.*

Tot slot willen we met de samenstellers van '10 voor de basisvorming rekenen/wiskunde' stellen dat *meetkunde een rijke bron is voor wiskundige activiteiten. Het gebied bevat zoveel aspecten dat er zeer verschillend tegenaan gekeken kan worden.* Een gevolg hiervan is in ieder geval dat lang niet iedereen zich – en zijn onderwijs – zal herkennen in de aspecten van meetkunde, die door de onderzoekers onderzocht resp. beschreven worden.

Noten

1 Zoals gebruikelijk schrijven wij over 'leraar', 'docent', 'hij'. Voor ons is het vanzelfsprekend dat daar ook 'lerares', 'docente', 'zij' zou kunnen staan.

2 1 Het uitsplitsen in 'wiskunde onderwerpen' en 'dat wat je met die onderwerpen in de les doet' kan o.i. niet los gezien worden van de vraag naar het 'hoe'. Een onderzoek dat daar dieper op in gaat zal echter een kwalitatieve component dienen te bevatten. Om het met Elliot Eisner te zeggen: 'One mode of conception and one form of disclosure are simply inadequate to exhaust the richness of educational life.'

2 Los van de slechts gedeeltelijke overlap tussen 'wiskunde onderwerpen' en 'mogelijke onderdelen van de wiskundeles' is er het probleem van het *achteraf* (aan het eind van het jaar) aangeven van *schattingen* van de hoeveelheid bestede tijd, terwijl niet *vooraf* gevraagd is een overzicht bij te houden.

3 Een derde probleem vormt voor ons de onduidelijkheid over de plaats/de vraag waarbij b.v. het behandelen van de ruit als spiegelsymmetrische figuur thuis hoort. Bij F_1 of bij F_2? Dit voorbeeld is met vele uit te breiden.

4 Het meest wezenlijk voor onze kritiek is misschien wel het feit dat hetgeen hier gepresenteerd wordt als 'wiskunde-onderwerpen' resp. 'onderdelen van de wiskundeles' een mengelmoesje aangeeft van (deels geoperationaliseerde) doelstellingen van wiskunde-onderwijs. Daarbij komen een aantal o.i. zeer belangrijke doelstellingen niet aan bod.
Met name geldt dit voor de door Erich Wittmann genoemde *Kognitieve Strategien* (allgemeine intellektuelle Haltungen und Fähigkeiten). Beispiele: Fähigkeiten zu argumentieren, zu generalisieren, sich kreativ zu verhalten, zu kritisieren, in eigener Regie zu lernen.

3 Concreet in de zin van 'voorstelbaar', 'betekenis kunnen geven', 'aansluiten bij de eigen ervaringswereld'.

4 Leen Streefland van het OW & OC stelde de vraag aan 14 leerlingen van een 5e klas basisschool als volgt:
Vier bekers ijs van 1 liter elk stonden op een rijtje in de koelkast klaar voor een feestje. Na afloop van het feestje was de 1e beker leeg, de 2e en 3e half vol en de 4e driekwart vol.
a Hoeveel ijs is er opgegeten?
b Hoeveel ijs is er over?
c Hoe kun je je antwoorden op a en b controleren?
De a en b vragen werden door 11 leerlingen goed beantwoord en 9 leerlingen konden met vraag c overweg.

Literatuur

Hiele, dr. P. M. van, *Begrip en Inzicht*, Muusses, Purmerend 1973
Kuper, J., Pelgrum, W. J., *Tweede Wiskunde Project: Aspecten van Meetkunde-Onderwijs*, T.H.T. Enschede 1983.
Mathematics Counts, Report of the Committee of Inquiry into the Teaching of Mathematics in Schools under the chairmanship of Dr. W. H. Cockcroft, London, 1982
Pelgrum, W. J., Eggen, Th. J. H. M., Plomp, Tj., *Tweede Wiskunde Project: Beschrijving van Uitkomsten*, T.H.T. Enschede 1983
Streefland, L., *Breuken*. Voordracht gehouden op de Panama Conferentie te Noordwijkerhout, 15 oktober 1984
Treffers, A. en E. de Moor, *10 voor de basisvorming rekenen/wiskunde*, Uitgave OW & OC 1984

Over de auteurs:

Harrie Broekman is werkzaam als vakdidacticus en lerarenopleider aan het Pedagogisch-Didactisch Instituut voor de Lerarenopleiding (P.D.I.) van de Rijksuniversiteit Utrecht en aan de Centrale Opleidings Cursus voor Middelbare Akten (C.O.C.M.A) te Utrecht.

Johan M. J. Weterings is werkzaam als vakdidacticus en onderwijskundige aan de Centrale Opleidings Cursus voor Middelbare Akten (C.O.C.M.A.) te Utrecht en het Nutsseminarium te Amsterdam.

Grootheid, eenheid, dimensie

P. G. J. Vredenduin

We weten allen wat een grootheid is en wat dimensie van een grootheid betekent. Totdat iemand het ons vraagt. Dan zijn velen slechts in staat een vaag antwoord te geven. Tot deze velen behoorde ik zelf ook. Door omstandigheden die hier niet ter zake doen, werd ik geconfronteerd met de lacunes in mijn inzicht. Zo kwam ik ertoe mezelf te dwingen mijn gedachten te ordenen en tot een, naar ik hoop verantwoord, antwoord te komen op de vraag wat een grootheid en zijn dimensie eigenlijk zijn.

1 Absolute additieve grootheden

Ik wil me oriënteren aan een voorbeeld: de lengte van een recht stuk lijn. Ik zeg opzettelijk niet 'lijnstuk', want ik bedrijf geen wiskunde. Ik heb het over fysische objecten.

Hoe komt het begrip 'lengte van een recht stuk lijn' tot stand? Drie fasen zijn hierbij essentieel:

a Om na te gaan of twee stukken lijn even lang zijn, leggen we ze naast elkaar. Steekt er van geen van beide iets uit, dan zijn ze even lang. (Mocht deze manipulatie niet lukken, dan weet de fysicus wel vervangende handelingen te bedenken.)

b Steekt het stuk lijn a uit buiten het stuk lijn b, dan is a langer dan b.

c Willen we weten hoe lang twee stukken lijn samen zijn, dan leggen we ze in elkaars verlengde. Er ontstaat een nieuw stuk dat even lang is als de oorspronkelijke twee samen.

Ik wil het voorgaande abstracter samenvatten. De stukken rechte lijn vormen een verzameling V. In deze verzameling zijn langs fysische weg gedefinieerd:

a een equivalentierelatie, genoteerd $\dot{=}$

b een relatie die V totaal strikt ordent, genoteerd $\dot{>}$

c een afbeelding van $V \times V$ (of van een echt deel ervan) naar V, genoteerd $\dot{+}$.

De sub c vermelde operatie noemen we 'samenstelling'.

De lengte van een stuk lijn is een positief reëel getal, dus de functiewaarde van een functie f van V naar $\mathbb{R}^+$. Deze functie heeft de volgende eigenschappen:

a als $a \dot{=} b$, dan is $f(a) = f(b)$

b als $a \dot{>} b$, dan is $f(a) > f(b)$

c als $(a, b) \in \text{dom} \dot{+}$, dan is $f(a \dot{+} b) = f(a) + f(b)$.

$f(a)$ heet de *lengte* van a

Generalisatie levert de volgende karakterisering van een absolute additieve grootheid.

$(V, \dot{=}, \dot{>}, \dot{+}, f)$ is een *absolute additieve grootheid*, wil zeggen:

A1a V is een verzameling, $\dot{=}$ een equivalentierelatie die V in equivalentieklassen verdeelt, $\dot{>}$ een relatie die V totaal strikt ordent, $\dot{+}$ een operatie die aan een (niet noodzakelijk elk) geordend paar elementen van V een element van V toevoegt en f een functie van V naar $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ met domein V.

A2a $a \dot{=} b \Rightarrow f(a) = f(b)$

A3a $a \dot{>} b \Rightarrow f(a) > f(b)$

A4a Als $(a, b) \in \text{dom} \dot{+}$, dan geldt $f(a \dot{+} b) = f(a) + f(b)$.

(Om praktische redenen is ook 0 als functiewaarde van f toegelaten.)

Wie nu de lengte van een stuk lijn wil bepalen en daarbij uitgaat van A1a-A4a en de vermelde interpretaties van $\dot{=}$, $\dot{>}$ en $\dot{+}$, zal merken dat de functie f daardoor nog slechts bepaald is op een constante factor na. Om f vast te leggen, is het voldoende één element van V te kiezen en daaraan de waarde 1 toe te kennen. *We zeggen dan dat we f vastgelegd hebben door het kiezen van een eenheid.*

Zo kiezen we als lengteëenheid veelal een bepaalde platina staaf die in Parijs bewaard wordt. Is dan $f(a) = p$, dan zeggen we dat de lengte van a gelijk is aan p meter.

Meer algemeen is lengte een geordend paar dat bestaat uit een reëel getal en een als eenheid gekozen object. Dit bedoelt men, als men zegt dat een lengte een *benoemd getal* is.

De term 'absolute additieve grootheden' suggereert dat we hier te maken hebben met een speciaal soort grootheden. Dit is inderdaad het geval. Het

speciale karakter bestaat daarin dat

a de waarden van f niet negatief kunnen zijn (vandaar de toevoeging 'absoluut')

er een samenstelling $\dotplus$ gedefinieerd is waarbij aan A4a voldaan is (vandaar de toevoeging 'additief').

Voorbeelden van absolute additieve grootheden zijn verder: oppervlakte, inhoud, massa, lichtsterkte, weerstand, energie, tijdsverloop.

2 Relatieve additieve grootheden

Ik begin weer met een voorbeeld: verplaatsingen langs een rechte lijn. Verplaatsingen langs een rechte lijn hebben een grootte en een richting. De grootte van de verplaatsing over AB is de lengte van AB. De rechte lijn kunnen we in twee richtingen doorlopen. Een daarvan noemen we de positieve, de andere de negatieve richting. Als de richting van A naar B de positieve is, zeggen we dat de verplaatsing positief is, en anders negatief.

Twee verplaatsingen noemen we gelijk ($\doteq$) als ze dezelfde grootte en dezelfde richting hebben. De definities van $\gtrdot$ en van $\dotplus$ laat ik aan de lezer over.

De functie f kiezen we zo dat $|f|$ gelijk is aan de grootte van de verplaatsing. Het teken van f correspondeert met het teken van de verplaatsing.

Tot de verplaatsingen rekenen we ook de 'verplaatsing' waarbij alles op zijn plaats blijft. De grootte van deze verplaatsing noemen we 0. Het bereik van f is dus $\mathbb{R}$.

Het enige waarin de verplaatsingen zich onderscheiden van de absolute additieve grootheden is, dat f ook negatieve waarden kan aannemen. Daarom noemen we f een relatieve additieve grootheid.

Zo komen we tot de volgende karakterisering.

$(V, \doteq, \gtrdot, \dotplus, f)$ is een *relatieve additieve grootheid*, wil zeggen:

A1r als A1a, maar nu is f een functie van V naar $\mathbb{R}$.

A2r, A3r, A4r als A2a, A3a, A4a

A5r $f(a) = p \Rightarrow \exists x\, f(x) = -p$

Zonder A5r zouden de absolute additieve grootheden een bijzonder geval zijn van de relatieve.

Voorbeelden van relatieve additieve grootheden zijn verder: snelheid (van bewegingen langs één rechte lijn), krachten (met een zelfde drager), koppels (in één vlak), rotaties (in één vlak om een zelfde punt), elektrische lading, stroomsterkte.

3 Niet-additieve grootheden

Soms spreken we van een grootheid, terwijl er geen samenstelling gedefinieerd is. Een voorbeeld daarvan is temperatuur.

We zeggen dat twee voorwerpen gelijke temperatuur hebben, als er geen warmtetransport plaats heeft wanneer ze met elkaar in contact gebracht worden. Heeft er warmtetransport plaats van voorwerp a naar voorwerp b, dan zeggen we dat a een hogere temperatuur heeft dan b. Hiermee zijn $\doteq$ en $\gtrdot$ gedefinieerd.

We kennen verschillende temperatuurschalen, dus verschillende functies f, die hiermee in overeenstemming zijn. Bijv. de Celsius-schaal, de Fahrenheit-schaal en de absolute schaal. Een samenstelling van temperaturen is niet gedefinieerd. Vandaar dat we temperatuur een niet-additieve grootheid noemen.

Zo komen we tot de volgende karakterisering.

$(V, \doteq, \gtrdot, f)$ is een *niet-additieve grootheid*, wil zeggen:

A1na V is een verzameling, $\doteq$ een equivalentierelatie die V in equivalentieklassen verdeelt, $\gtrdot$ een relatie die V totaal strikt ordent en f een functie van V naar $\mathbb{R}$ met domein V.

A2na $a \doteq b \Rightarrow f(a) = f(b)$

A3na $a \gtrdot b \Rightarrow f(a) > f(b)$.

Nu is echter, als $\doteq$ en $\gtrdot$ gedefinieerd zijn, de functie f niet op een constante na bepaald. Integendeel, als f aan A2na en A3na voldoet en f^* een strikt stijgende functie van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ (met domein $\mathbb{R}$) is, dan voldoet ook $f^* \circ f$.

We keren terug naar de temperatuur. De fysicus zal zijn temperatuurschaal zo kiezen dat hij eenvoudige formules krijgt. Hij kiest f_{abs} en krijgt zo een eenvoudige formule voor de wet van Boyle-Gay Lussac. Kiest hij een andere schaal f_1 en geldt $f_1 = f^* \circ f_{abs}$, dan zal in alle formules f^* als extra bestanddeel optreden. De keuze van f_{abs} geschiedt dus op specifiek fysische gronden; in principe is de keus vrij, althans voorzover de orde niet verstoord wordt.

4 Grootheden

Totnogtoe heb ik niet gezegd wat een grootheid is. Ik zou grootheid willen opvatten als een verzamel-

naam voor absolute additieve, relatieve additieve en niet-additieve grootheden. Zo nodig kan men deze opsomming uitbreiden met bijv. vectoriële en tensoriële grootheden. Grootheid is dus niet vast omlijnd, evenmin als in de wiskunde getal vast omlijnd is. We kennen natuurlijke getallen, gehele, rationale, reële, complexe getallen. Ook deze opsomming is voor uitbreiding vatbaar met bijv. quaternionen en octaven.
De kern van het begrip grootheid is dat er sprake is van een verzameling V die bestaat uit fysische objecten of situaties. Deze verzameling wordt door $\doteq$ in equivalentieklassen verdeeld en door $\dot{>}$ totaal strikt geordend. Een functie f voegt aan elk element van V een reëel getal toe, in overeenstemming met $\doteq$ en $\dot{>}$. Verdere eigenschappen bepalen de verschillende soorten grootheden.
De lezer zal al wel gemerkt hebben dat bij een additieve grootheid $\dot{>}$ gedefinieerd kan worden met behulp van $\doteq$ en $\dot{+}$. Vaak stel ik een grootheid voor door een enkele letter. Daarvoor kies ik, in afwijking van het fysische gebruik, een hoofdletter. Zo stel ik lengte voor door L. Als de duidelijkheid het gewenst maakt, schrijf ik dan:

$$L = (V_L, \doteq_L, \dot{>}_L, \dot{+}_L, f_L)$$

5 Eenheden

Tussen verschillende grootheden en daardoor tussen hun eenheden bestaat vaak verband. Ik wil dit toelichten aan de hand van twee voorbeelden.
Eerste voorbeeld: snelheid. Ik beperk me tot eenparige bewegingen langs een zelfde rechte lijn. Hun snelheid is een relatieve additieve grootheid.
We weten dat de snelheid van een beweging bepaald wordt door de lengte van de weg die in een bepaald tijdsverloop afgelegd wordt. Om f_{snelheid} vast te leggen, moeten we een eenheid van snelheid kiezen. Neem aan dat de eenheden van lengte en van tijdsverloop reeds gekozen zijn. De eenheid van snelheid kiezen we dan zo, dat de snelheid van een beweging waarbij in 1 eenheid van tijdsverloop een weg van 1 lengteëenheid afgelegd wordt, gelijk is aan 1 eenheid van snelheid.
Kiezen we als lengteëenheid 1 m en als eenheid van tijdsverloop 1 sec, dan noemen we de eenheid van snelheid 1 m/sec.
Hierbij geldt:
kiezen we de lengteëenheid k maal zo groot, dan wordt de eenheid van snelheid ook k maal zo groot;
kiezen we de eenheid van tijdsverloop k maal zo groot, dan wordt de eenheid van snelheid k^{-1} maal zo groot.
Tweede voorbeeld: versnelling. Ik beperk me tot eenparig versnelde bewegingen langs een zelfde lijn. Hun versnelling is een relatieve additieve grootheid.
Versnelling wordt gedefinieerd met behulp van snelheid en tijdsverloop, snelheid met behulp van lengte en tijdsverloop, dus versnelling met behulp van lengte en tijdsverloop.
De eenheid van versnelling kiezen we zo dat de versnelling van een beweging waarbij in 1 eenheid van tijdsverloop de snelheid met 1 eenheid van snelheid toeneemt, gelijk is aan 1 eenheid van versnelling.
Kiezen we als eenheid van snelheid 1 m/sec en als eenheid van tijdsverloop 1 sec, dan noemen we de eenheid van versnelling 1 (m/sec)/sec of kortweg 1 m/sec^2.
Hierbij geldt:
kiezen we de lengteëenheid k maal zo groot, dan wordt de eenheid van versnelling ook k maal zo groot;
kiezen we de eenheid van tijdsverloop k maal zo groot, dan wordt de eenheid van versnelling k^{-2} maal zo groot.

Nu de essentie. *De grootheid snelheid wordt gedefinieerd met behulp van de grootheden lengte en tijdsverloop.* In een fysische situatie waarin een snelheid optreedt, treden dus een lengte en een tijdsverloop op. De eenheid van snelheid kiezen we zo, dat als deze lengte en dit tijdsverloop beide f-waarde 1 hebben, ook de snelheid f-waarde 1 heeft. *We zeggen dan dat de eenheid van snelheid aangepast is aan de eenheden van lengte en van tijdsverloop.*
Versnelling is gedefinieerd met behulp van snelheid en tijdsverloop. In een fysische situatie waarin een versnelling optreedt, treden dus een snelheid en een tijdsverloop op. Hebben deze beide als f-waarde 1, dan wordt ervoor gezorgd dat ook de versnelling als f-waarde 1 heeft. De eenheid van versnelling is dus aangepast aan die van snelheid en tijdsverloop. Uiteindelijk kunnen we ook zeggen, dat versnelling

gedefinieerd is met behulp van lengte en tijdsverloop en dat de eenheid van versnelling aangepast is aan die van lengte en van tijdsverloop.

Bij dit definitieproces kunnen we uitgaan van enkele *basisgrootheden* en de andere daaruit afleiden. De *basiseenheden*, dat zijn de eenheden van de basisgrootheden, kunnen we dan willekeurig kiezen. De overige eenheden leiden we door aanpassing uit de basiseenheden af.

Er heeft zich een conventie ontwikkeld. Hieronder een lijstje met enkele algemeen aanvaarde basisgrootheden en hun eenheden.

grootheid	verkorte notatie	eenheid
lengte	L	m
tijdsverloop	T	sec
massa	M	kg
temperatuur	Θ	K (graad Kelvin)

6 Dimensie

Nu de dimensie. Laat ik maar met de deur in huis vallen en meteen de definitie geven.

Definitie

$\dim G = B_1^{p_1} B_2^{p_2} \dots B_n^{p_n}$ $(p_1, p_2, \dots, p_n \in \mathbb{Z})$

betekent:

de grootheid G is afgeleid uit de basisgrootheden $B_1, B_2, \dots, B_n$

de eenheid van G is aangepast aan de eenheden van $B_1, B_2, \dots, B_n$

kiezen we de eenheid van B_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ *k maal zo groot, dan wordt de eenheid van G daardoor* k^{p_i} *maal zo groot.*

Opmerkingen:

1 Zo nodig kan men toelaten dat de getallen p_i gebroken zijn. Zouden we als basisgrootheid niet L maar de oppervlakte O kiezen, dan was $\dim L = O^{\frac{1}{2}}$.

2 Het is mogelijk dat in de definitie van G een grootheid B_j wel een rol speelt, maar dat wijziging van de eenheid van B_j geen invloed heeft op de eenheid van G. Dan is $p_j = 0$. Factoren van de vorm B_j^0 worden vaak weggelaten.

3 Indien $p_j = 1$, dient men eigenlijk te schrijven B_j^1. In plaats daarvan schrijft men als regel B_j.

Nu een opmerking van meer fundamentele aard. In de definitie van $\dim G$ spelen een rol basisgrootheden B_i en daaraan toegevoegde getallen p_i. Eigenlijk is $\dim G$ dus een verzameling geordende paren (B_i, p_i). Dus

$\dim G = \{(B_1, p_1), (B_2, p_2), \dots, (B_n, p_n)\}$

Gebruik is deze verzameling op een bepaalde manier te schrijven, nl. als

$\dim G = B_1^{p_1} B_2^{p_2} \dots B_n^{p_n}$

Hierin zien $p_1, p_2, \dots, p_n$ er uit als exponenten. Dat is natuurlijk opzet. *Ze zijn geschreven als exponenten, omdat ze zich gedragen als exponenten.* Ik wil proberen dit duidelijk te maken.

Onderstel G is gedefinieerd met behulp van G_1 en G_2. Elk element $g \in V_g$ heeft als bestanddeel een $g_1 \in V_{G_1}$ en een $g_2 \in V_{G_2}$. Onderstel dat uit de definitie van G volgt dat $f_G(g) = f_{G_1}(g_1) f_{G_2}(g_2)$.

Als nu $\dim G_1 = B_1^{p_1} B_2^{q_1}$ en $\dim G_2 = B_1^{p_2} B_2^{q_2}$, dan is $\dim G = B_1^{p_1+p_2} B_2^{q_1+q_2}$. Dit is een direct gevolg van de definitie van dimensie.

Als $f_G(g) = \dfrac{f_{G_1}(g_1)}{f_{G_2}(g_2)}$, dan worden exponenten afgetrokken.

Twee voorbeelden

a Arbeid: $W = Fl$

dim kracht $= \mathrm{MLT}^{-2}$

dim lengte $= \mathrm{L}$

dus

dim arbeid $= \mathrm{ML}^2\mathrm{T}^{-2}$

b Druk: $P = \dfrac{F}{O}$

dim kracht $= \mathrm{MLT}^{-2}$

dim oppervlakte $= \mathrm{L}^2$

dus

dim druk $= \mathrm{ML}^{-1}\mathrm{T}^{-2}$

7 Constante grootheden

De aantrekkingswet van Newton zegt:

$$F = c\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Het linker lid is een functiewaarde van f_{kracht} en de dimensie van kracht is MLT^{-2}. Fysici vinden dit een langdradige manier om zich uit te drukken en zeggen kortweg: de dimensie van F is MLT^{-2}. Dat is praktisch en ik zal hun voorbeeld volgen.

De dimensie van $c\frac{m_1 m_2}{r^2}$ is dus ook MLT^{-2}. De dimensie van $\frac{m_1 m_2}{r^2}$ is M^2L^{-2}. Hieruit wordt dan geconcludeerd: de dimensie van c is $M^{-1}L^3T^{-2}$. Formeel klopt dit keurig. Voorlopig snap ik er echter niet veel van. Is c de f-waarde van een of andere grootheid C?
We weten dat

$$c = \frac{Fr^2}{m_1 m_2}$$

De fysische situatie bestaat hier uit twee objecten. Deze hebben massa's m_1 en m_2 massaeenheden, de afstand van hun zwaartepunten is r lengteëenheden en ze trekken elkaar aan met een kracht van F krachteenheden. Op dezelfde manier als snelheid gedefinieerd is met behulp van afgelegde weg en tijdsverloop, is hier een grootheid gedefinieerd met behulp van twee massa's, een afstand en een kracht. Na aanpassing van de eenheid is de f-waarde van deze grootheid gelijk aan $\frac{Fr^2}{m_1 m_2}$. We zullen deze grootheid aanduiden met C. Nu is er een natuurwet die zegt dat de f-waarde van C in alle fysische situaties dezelfde is. Men noemt C dan een *constante grootheid.*
Dit resultaat maant ons wel tot voorzichtigheid. Ietwat voorbarig heb ik het gehad over aanpassing van de eenheid. Dat zou betekenen dat in het geval $F = 1, m_1 = m_2 = 1, r = 1$ we de waarde van f_C ook 1 stellen. Maar dit geval kan zich niet voordoen. We moeten f_C dus op een andere manier vastleggen. Dit doen we bijv. door af te spreken: als de f-waarden van beide massa's en van de afstand 1 zijn, dan kiezen we voor de waarde van f_C de f-waarde van de aantrekkingskracht.
Ook met de dimensie moeten we voorzichtig zijn, want de eenheid van C bestaat niet. We maken nu gebruik van de volgende bekende eigenschap:
als van een grootheid G de eenheid k maal zo groot gekozen wordt, dan worden alle waarden van f_G vermenigvuldigd met k^{-1}.
Voor C geldt:
als de eenheid van massa k maal zo groot gekozen wordt, dan wordt c (de functiewaarde van f_C) vermenigvuldigd met k;
als de eenheid van lengte k maal zo groot gekozen wordt, dan wordt c vermenigvuldigd met k^{-3};
als de eenheid van tijdsverloop k maal zo groot gekozen wordt, dan wordt c vermenigvuldigd met k^2.
Op deze gronden zegt men dat

$$\dim C = M^{-1}L^3T^{-2}$$

De fysicus pleegt dan te zeggen dat c een constante is met dimensie $M^{-1}L^3T^{-2}$. Daartegen is geen enkel bezwaar, als de betekenis van deze zegswijze maar duidelijk is.

Opmerking: Ik wil nog verifiëren of C aan de karakterisering van grootheid voldoet. Dus of we inderdaad kunnen schrijven:

$$C = (V_C, \dot{=}_C, \dot{>}_C, \dot{+}_C, f_C).$$

V_C bestaat uit de hierboven beschreven fysische situaties. Omdat f_C een constante functie is, geldt voor elke $a, b \in V_C$, dat $a \dot{=}_C b$. Dus verdeelt $\dot{=}_C$ de verzameling V_C in één equivalentieklasse en dat is V_C zelf. Daarmee is V_C totaal geordend; de relatie $\dot{>}_C$ blijkt leeg te zijn. Samenstelling heeft geen zin en de operatie $\dot{+}$ heeft een leeg domein. De functie f_C voldoet daardoor op triviale wijze aan de gestelde eisen.

8 Enkele bijzondere gevallen

1 *Hoekgrootte*
Om de grootte van een hoek te bepalen, trekken we een cirkel met het hoekpunt als middelpunt. Neem een $a \in V_{hoek}$. De cirkelboog b binnen a is een element van V_L en de straal s eveneens.
Nu is $f_{hoek}(a) = \frac{f_L(b)}{f_L(s)}$.
Daaruit volgt: dim hoek $= L^0$. Laten we conform de conventie L^0 weg, dan schrijven we:

$$\text{dim hoek} = 1$$

2 *Hoeveelheid*
Onder een hoeveelheid versta ik bijv. een aantal appels of het aantal inwoners van een bepaalde plaats. Men zou kunnen zeggen: een verzameling voorzien van een aantal.

Hebben we hier te maken met een grootheid? Dus met een structuur $(V, \dot{=}, \dot{>}, \dot{+}, f)$? We laten zien dat dit het geval is.
De elementen van V zijn (fysische) verzamelingen. Hiervoor geldt $a \dot{=} b$, als er een bijectie bestaat tussen a en b.
Er geldt $a \dot{>} b$, als er een bijectie bestaat tussen b en een echt deel van a. (Wiskundigen zouden hier nog aan toevoegen: en geen bijectie tussen a en b. Omdat fysische verzamelingen eindig zijn, kunnen we deze toevoeging achterwege laten.)
De operatie $\dot{+}$ is alleen gedefinieerd tussen disjuncte verzamelingen en betekent dan vereniging.
Om f vast te leggen, moeten we nog een eenheid kiezen. Doorgaans kiest men daarvoor een singleton, dus een verzameling a waarvoor geldt:
$a \neq \phi$
$x \in a \wedge y \in a \Rightarrow x = y$
De gebruikelijke naam voor deze eenheid is 'stuks'. Misschien denkt men dat het kiezen van deze eenheid imperatief is. Dat is echter niet het geval. Denk maar aan een tabel met de aantallen inwoners van de Nederlandse provincies in duizendtallen. Een bekende andere afwijkende eenheid is het dozijn.
Hoeveelheid is een basisgrootheid. Als verkorte schrijfwijze kies ik H.
Ter toelichting enkele voorbeelden van dimensies waarin H een rol speelt.
Bevolkingsdichtheid is het aantal inwoners per oppervlakte-eenheid. De dimensie is HL^{-2}.
Trillingsgetal is het aantal trillingen per tijdseenheid. De dimensie is HT^{-1}.
Trillingstijd is het tijdsverloop per trilling. De dimensie is $H^{-1}T$.
Fysici hebben de gewoonte H in hun dimensieformules weg te laten. Ze zullen er vast niet aan denken ten gevolge van mijn beschouwingen hun strategie te wijzigen. Waarom niet? Fysici nemen als vaste eenheid de 'stuks'. Omdat deze eenheid door hen onveranderbaar gekozen is, heeft het voor hen geen zin te vragen naar de invloed van een verandering van de eenheid van hoeveelheid op andere eenheden. Daarmee is het opnemen van machten van H in hun dimensieformules overbodig geworden.

3 *Dimensieloze constanten*
De formule voor de slingertijd luidt:

$$t = c\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Nu geldt:
de dimensie van t is $H^{-1}T$ en de dimensie van $\sqrt{\frac{l}{g}}$ is L^0T. Daaruit volgt:
de dimensie van c is $H^{-1}L^0T^0$.
Volgens conventie kunnen we L^0T^0 weglaten. Fysici laten ook H^{-1} weg. Er blijft dan over:
de dimensie van c is 1.
Gemakshalve zeggen fysici dat er niets overblijft en noemen c dan een dimensieloze constante. *In feite heeft echter elke constante in een fysische formule een dimensie.*

9 Slotopmerkingen

1 Ik heb het op één uitzondering na (bevolkingsdichtheid) gehad over dimensie in de fysica. Het spreekt vanzelf dat dimensie een veel ruimer begrip is. Het speelt in elke wetenschap een rol waarin benoemde getallen voorkomen.
Ook in de wiskunde? Ik wil hier niet nader op ingaan. Ieder kan voor zichzelf proberen een antwoord te vinden en zal dan merken dat dit bevestigend luidt.

2 Met behulp van uiterst eenvoudige voorbeelden heb ik getracht duidelijk te maken hoe in principe de samenhang is tussen grootheid, eenheid en dimensie. Het is de taak van de fysicus aan deze samenhang concrete inhoud te geven. Waar de fysicus hier begint te denken, houd ik juist op.
Anderzijds vindt men bij de fysicus geen analyse van de begrippen grootheid en dimensie. Men zou kunnen zeggen, dat waar de fysicus hier ophoudt te denken de wiskundige begint.
Fysici en mathematen vullen elkaar blijkbaar op een vruchtbare wijze aan.

Wiskunde in de psychologiestudie

J. Chr. Perrenet

1 Inleiding

Met de invoering van de HEWET wordt onder meer gepoogd het wiskunde-onderwijs in de bovenbouw beter te doen aansluiten bij de wiskunde, die in de diverse studierichtingen van de sociale wetenschappen gebruikt wordt. Met name het wiskunde A programma is hiervoor bedoeld. Met dit artikel wil ik een indruk geven van de soort wiskunde, die binnen één van die studies, de psychologie, wordt gehanteerd.
Ik beperk me daarbij tot het programma aan de universiteit, waar ik zelf het vak studeerde (de Universiteit van Amsterdam). Natuurlijk zijn er verschillen tussen de programma's der diverse universiteiten en ook is er sinds de invoering van de twee-fasenwet wel iets van het programma veranderd (lees: weggelaten), maar voor een globale indruk van wat er op wiskundegebied bij de psychologie-studie komt kijken, lijkt me de schets generaliseerbaar. Ook aan de rol van de computer zal ik aandacht besteden.

2 De studie voor het kandidaatsexamen

Voor het kandidaats was het veel statistiek, die doorgeworsteld moest worden: een vervelende verrassing voor hen, die dachten dingen over mensen te leren, over dromen en neurosen. Ze bleken er moeilijk van te overtuigen, dat ook bij dergelijke onderwerpen onderzoek van grote groepen zinvol kan zijn en dat zonder statistisch gereken de onderzoeker of de kritische lezer van onderzoeksresultaten het niet redt.

Was er bij kansrekening en statistiek vaak nog sprake van enigszins aansprekende contexten, vakken als psychometrica en testleer bestonden voor een groot deel uit een aaneenschakeling van definities, afleidingen van formules en kale oefeningen daarmee. In de formules bij testleer was regelmatig het sigmateken te zien. Vooral in de psychometrica speelden matrices en vectoren een rol, naast e-machten, integreren en differentiëren.

Op dit moment past een zijsprong naar de invulling van het onderdeel matrices in het HEWET-materiaal van OW&OC: Het viel me op dat er velerlei toepassingen waren, van economische (winkelvoorraden) tot biologische (aantallen dieren in levensstadia), maar er was geen voorbeeld te zien van het matrixgebruik, dat zo vaak in de psychologie (en ook in de pedagogie en de onderwijskunde) voorkomt: een weergave van testresultaten van proefpersonen. Een dergelijke toepassing is eenvoudig naar de klassesituatie te vertalen: leerlingen met rapportcijfers of proefwerkbeoordelingen (zie afbeelding 1). Eenvoudige oefeningen

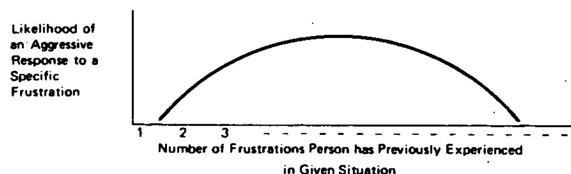
	Engels	Ned.	Wisk.	....
Karel	6	5	7	....
Annie	9	8	8	....
Joke	7	7	6	....
⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

Figuur 1

zijn het interpreteren van kolom- en rijgemiddelden. Een illustratie van matrixvermenigvuldiging binnen deze context voert waarschijnlijk te ver. De berekening van een correlatiematrix bijvoorbeeld zou een veel grondiger behandeling van het begrip correlatie vereisen dan de kwalitatieve wijze, waarop dit in het pakketje Grafische Verwerking gebeurt.

Bij een ander onderwerp komen we machten en logaritmen tegen: in de psychofysica. De psychofysica houdt zich onder andere bezig met verbanden

tussen fysische en psychologische verschijnselen. Een voorbeeld is het volgende: Als mens heeft men de beschikking over zintuigen. Daarmee kunnen prikkels worden waargenomen, die ook door fysische apparaten kunnen worden geregistreerd. Gebleken is nu, dat fysische intensiteit en psychologische sensatie niet in gelijke mate toenemen, maar dat er wel een eenvoudig verband tussen bestaat, de machtswet van Stevens $J = kI^p$ (of $\log J = \log k + p \cdot \log I$). Hierbij is J de psychologische sensatie, I de fysische intensiteit, p een parameter die van het soort prikkel afhangt en k een omrekeningsconstante. Zo geldt bij de beoordeling van de helderheid van lichtbronnen: $p = 1/3$, dat wil zeggen een lichtbron, die fysisch gemeten 1000 maal zo helder is als een andere lichtbron, wordt door de mens als 10 maal zo helder beoordeeld.
Binnen het onderdeel ontwikkelingspsychologie spelen de theorieën van Piaget nog een grote rol. Bij het beschrijven van zijn theorieën over motorische en denkontwikkeling gebruikte Piaget heel wat wiskundige modellen. Het is een soort wiskunde, elementaire groepentheorie, die juist in ons voortgezet onderwijs opzij is gezet. Overigens wordt er van wiskundige zijde kritiek geleverd op de correctheid van Piagets wiskunde (door Freudenthal met name).
Talloze verschijnselen van psychologische aard worden met grafiekjes in beeld gebracht en soms vertaald in een wiskundig model: vaak een lineair verband of een omgekeerde evenredigheid. Zeer bekend is ook de 'omgekeerde U', waarbij een grootheid tot zekere hoogte een andere versterkt en daarna remmend gaat werken (zie het voorbeeld in afbeelding 2).



Figuur 2

Hoewel een aantal van de verschijnselen, die in de psychologie bestudeerd worden van periodieke aard is – bijvoorbeeld biologische ritmen, licht en geluid bij de zintuigen, – ben ik er zelden een goniometrische functie tegengekomen.
De manier waarop met wiskunde wordt omgegaan sluit over het algemeen aan bij de aanpak zoals in wiskunde A bedoeld: geen zware bewijzen of afleidingen, maar het gebruiken van wiskundige modellen in reële (psychologische) situaties. Hier en daar komt in de eerste fase van de studie ook wel eens een onderwerp ter sprake, dat qua inhoud meer bij wiskunde B aansluit, zoals het zien van perspectief (ruimtemeetkunde).

3 De doctoraal-fase van de studie

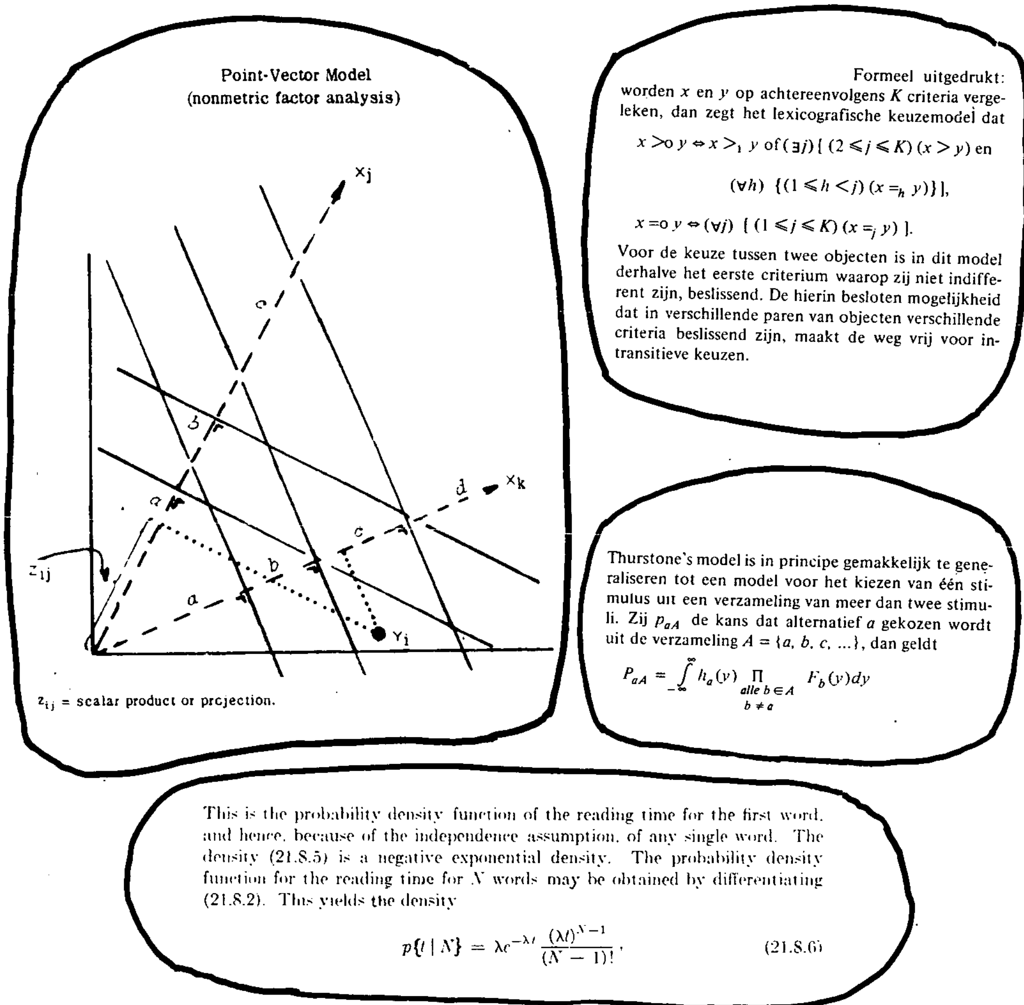
Het hangt van de keuze van de afstudeerrichting af of men in het tweede deel van de psychologiestudie vaak wiskunde ontmoet of niet. Binnen een richting als persoonlijkheidsleer zal het niet veel voorkomen, maar bij methodenleer, psychofysiologie en functieleer speelt de wiskunde een belangrijke rol. Vooral bij methodenleer is er flink wat diepgaande statistiek te verteren; ik zal het verder hebben over de richting functieleer, mijn keuze (functie duidt hier niet op het wiskundig begrip functie, maar op het menselijk functioneren).
In mijn laatste studiejaren bleek ik bij diverse onderdelen er zelfs een voordeel aan te hebben, dat ik eerder een wiskundestudie volgde: bij taalpsychologie kwamen de logica en grammatica's á la Chomsky aan de orde; bij neuropsychologie de Turingmachine, onderwerpen die ook in de wiskunde B niet te vinden zijn.
Er bestaat een studie-onderdeel met de naam 'Mathematische Psychologie'. Deze tak van de psychologie legt zich speciaal toe op het gebruiken of geschikt maken van stukken wiskunde voor de psychologie. Daarbij moeten de studenten met behoorlijk pittige wiskunde kunnen omgaan. Om een indruk te geven van het wiskundig niveau geef ik in afbeelding 3 (zonder toelichting) een collage van flarden uit literatuur, die ik destijds voor dit vak moest doorwerken.

Aan de andere kant is de wiskunde, preciezer gezegd: 'het leren van wiskunde en het oplossen van wiskundige problemen', een geliefd studieobject van de cognitieve psychologie (= denkpsychologie, een onderdeel van de functieleer). Als

reden wordt aangevoerd, dat de wiskundestof een overzichtelijk gesloten kennisdomein vormt, waarbij de rol van natuurlijke taal gering is. Ik weet wel zeker, dat heel wat wiskundedidactici zich niet zonder meer in deze aanname zullen herkennen. (Voor discussie over dit punt verwijs ik naar de eindscriptie van mijn psychologiestudie).
Bij een onderwerp als rekenstoornissen, onderdeel van de cursus functiestoornissen, komt men soms in de buurt van de wiskunde/rekendidactiek.

4 De computer binnen de psychologie

Vervolgens wil ik ingaan op het gebruik dat bij de psychologie van computers gemaakt wordt. Het houdt veel meer in dan automatische gegevensverwerking. Oorspronkelijk was het inderdaad slechts hulp bij het (statistische) rekenwerk: Reeds voor het kandidaats kregen we te maken met het pakket statistische procedures SPSS (Statistical Package for Social Sciences). Eerst gebeurde dat met gebruikmaking van ponskaarten, enkele jaren later gingen we interactief werken achter een terminalscherm.



Formeel uitgedrukt: worden x en y op achtereenvolgens K criteria vergeleken, dan zegt het lexicografische keuzemodel dat

$$x >_0 y \Leftrightarrow x >_1 y \text{ of } (\exists j)\{(2 \leqslant j \leqslant K)(x > y) \text{ en } (\forall h)\ \{(1 \leqslant h < j)(x =_h y)\}\},$$

$$x =_0 y \Leftrightarrow (\forall j)\ \{(1 \leqslant j \leqslant K)(x =_j y)\}.$$

Voor de keuze tussen twee objecten is in dit model derhalve het eerste criterium waarop zij niet indifferent zijn, beslissend. De hierin besloten mogelijkheid dat in verschillende paren van objecten verschillende criteria beslissend zijn, maakt de weg vrij voor intransitieve keuzen.

Thurstone's model is in principe gemakkelijk te generaliseren tot een model voor het kiezen van één stimulus uit een verzameling van meer dan twee stimuli. Zij p_{aA} de kans dat alternatief a gekozen wordt uit de verzameling $A = \{a, b, c, \ldots\}$, dan geldt

$$p_{aA} = \int_{-\infty}^{\infty} h_a(y) \prod_{\substack{\text{alle } b \in A \\ b \neq a}} F_b(y)dy$$

This is the probability density function of the reading time for the first word, and hence, because of the independence assumption, of any single word. The density (21.8.5) is a negative exponential density. The probability density function for the reading time for N words may be obtained by differentiating (21.8.2). This yields the density

$$p\{t \mid N\} = \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{N-1}}{(N-1)!}, \qquad (21.8.6)$$

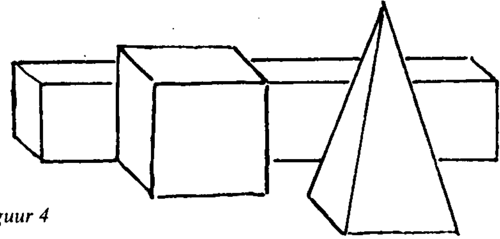
Figuur 3

Problemen die me bij medestudenten (en soms bij mezelf) opvielen, waren:

a Het kunnen omgaan met de verschillende niveaus van interactie met de computer, waarbij van meerdere talen gebruik moet worden gemaakt: een stuurtaal voor het algemeen contact, een editortaal om een programma te schrijven en de taal van het programma zelf. Elke taal heeft weer zijn eigen manier van foutmeldingen geven.
b Het gebruik kunnen maken van de overvloedige mogelijkheden, het kunnen lezen van de handleiding voor SPPS. Niet zelden verdronk men in niet-gevraagde output.
c Het nauwkeurig moeten werken, het over eigen fouten heenkijken.
d De neiging snel even een programmaatje te schrijven en af te wachten of het werkt, in plaats van schematisch te werk te gaan.

In het pakketje Automatische Gegevens Verwerking van OW & OC zag ik, dat de auteurs sommige van deze problemen (met name b en d) al in het voortgezet onderwijs proberen te bestrijden.
Later in de studie werd van computers gebruik gemaakt bij het nauwkeurig besturen en registreren van experimenten, waar de factor tijd heel belangrijk bij is. Bij waarnemingsexperimenten bijvoorbeeld moeten soms dia's gedurende fracties van seconden vertoond worden en met zeer precieze tussenpozen. De proefpersoon moet dan, afhankelijk van wat hij/zij zag, zo snel mogelijk op een bepaalde knop drukken. De reactietijd en de keuze voor een bepaalde knop wordt geregistreerd. Registratie en besturing van een dergelijk proces kan met een Fortran-programma.
Sommige cursussen werden gegeven in de vorm van computer-gestuurde instructie (cai). Daarnaast is het ontwikkelen van geavanceerde systemen op dit terrein deel van het onderzoek, waar men als student bij stage en werkstuk bij ingeschakeld kan worden. Men moet hierbij denken aan mogelijkheden als: het computerprogramma laten ingaan op specifieke fouten van de leerling of het verwijzen naar speciale oefeningen op grond van de individuele leergeschiedenis.

Groeiend is het vak artificiële intelligentie. In dit vak wordt gepoogd computers intelligente taken te laten uitvoeren. Dat wil zeggen, men probeert programma's te ontwerpen, die problemen kunnen oplossen, die tot voor kort slechts door mensen konden worden aangepakt. Het gaat hierbij om problemen van vaak wiskundige aard: redactiesommen, algebraïsche vergelijkingen, onbepaalde integralen of (ruimtemeetkunde!) het driedimensionaal interpreteren van een tweedimensionale afbeelding (zie afbeelding 4).


Figuur 4

Een driedimensionale interpretatie is: Er zijn drie voorwerpen, een balk, een kubus en een piramide. De balk ligt. Links voor de balk staat de kubus. De balk en de kubus staan tegen elkaar aan. Rechts voor de balk staat de piramide. De piramide raakt de balk niet en de kubus niet.

Verwant met de artificiële intelligentie, maar daar toch van verschillend, is het simuleren van menselijke denkprocessen met behulp van computerprogramma's. Het gaat er bij deze methode om – in tegenstelling tot wat binnen de artificiële intelligentie gebeurt – om programma's te construeren, die problemen oplossen op een menselijke manier. Dat wil zeggen dat er fouten gemaakt worden en dat, soms op chaotische wijze, verschillende aanpakken van een probleem worden geprobeerd. Slaagt men erin zo'n programma te ontwikkelen, dan heeft men daarmee in feite een zeer precieze theorie over het menselijk probleemoplossen gemaakt.
Door weglaten of toevoegen van procedures kunnen verschillen in oplosgedrag tussen beginners en gevorderden gesimuleerd worden. Het gaat hierbij dus om een *beschrijvend* model (hoe doet de oplosser het) en niet om een *voorschrijvend* model (hoe zou de oplosser, de leerling het moeten doen). Dit verschil wordt door buitenstaanders wel eens over het hoofd gezien.

Op grond van het bovenstaande zal het geen verwondering wekken, dat bij functieleer het bijvak informatica met klem wordt aanbevolen. Het is een

studieonderdeel, dat in zwaarte toeneemt; het bevat oefening in de talen Pascal en Lisp, en voorts de onderwerpen: datastructuren, programmeermethoden en computerarchitectuur.
Vermeldenswaard is tenslotte, dat voor het uittypen van scripties en verslagen de typemachine in onbruik begint te geraken: steeds vaker ziet men hiertoe studenten de computer als tekstverwerker benutten.

5 Slot

Aan het eind van dit artikel wil ik opmerken, dat de rol van de wiskunde en de informatica in de psychologie-studie groter is dan sommigen (bijvoorbeeld beginnende studenten) veronderstellen en dat het aandeel groeit. Het pakket wiskunde A lijkt me als voorbereiding veel beter dan het vroegere wiskunde I. Wie naast A ook B in het pakket heeft opgenomen, zal bij een keuze binnen de psychologie voor een meer exacte richting (bijvoorbeeld functieleer) de wiskunde B zeker kunnen gebruiken.

6 Literatuur

Meer over artificiële intelligentie en cognitief psychologisch onderzoek in verband met het leren en onderwijzen van wiskunde is te vinden in mijn eindscriptie psychologie: *Heen en Weer tussen Didaktiek van de Wiskunde en Kognitieve Psychologie*, Universiteit van Amsterdam, Subfaculteit Psychologie, 1983 (te bestellen bij de auteur).
De kritiek van Freudenthal op de wiskunde van Piaget is te vinden in *Mathematics as an Educational Task*, Reidel, Dordrecht, 1973.

***Over de auteur*:**

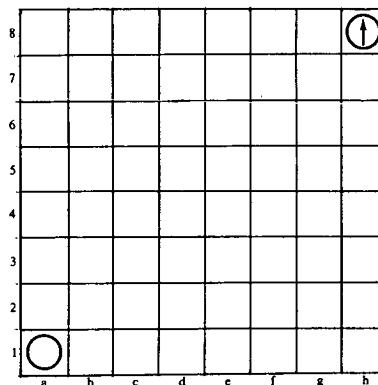
Hij voltooide een studie wis- en natuurkunde in 1972, gaf enige jaren onderwijs op verschillende niveaus, verrichtte onderzoek naar rekenonderwijs, deed doctoraalexamen psychologie in 1983 en is momenteel verbonden als onderzoeker wiskundedidactiek aan de Vrije Universiteit; incidenteel geeft hij daarnaast wiskunde-onderwijs.

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, 6865 HN Doorwerth.

Opgaven

530 Op een schaakbord wordt op veld a1 een schijf gezet. Op de schijf staat een pijl. Met deze schijf worden zetten gedaan. Elke zet bestaat uit een verschuiving over één veld naar boven, beneden, links of rechts, gevolgd door een draaiing over +90°. *A* begint en doet drie zetten. Dan is de beurt aan *B*. *B* doet twee zetten. In de volgende beurt doet *A* weer drie zetten enz. Doel van *A* is de schijf op veld h8 te krijgen met de pijl naar boven, en wel aan het einde van een beurt. De beginrichting van de pijl wordt door het lot bepaald. Als *A* zijn doel bereikt in maximaal zestien beurten, heeft hij gewonnen. Zo niet, dan wint *B*. Hoe loopt het af?



531 Hoe moeten we een bladzijde van een boek vouwen om ervoor te zorgen dat het omgevouwen deel maximaal ver buiten het boek uitsteekt?

532 Gegeven zijn in het vlak twee punten *A* en *B*.
a Wat is de verzameling van de punten *C* waarvoor driehoek *ABC* scherphoekig is?
b Wat is de verzameling van de punten *C* waarvoor de hoeken van driehoek *ABC* alle hoogstens 75° zijn?

Een directe weg naar a^x, ln a en $^{10}\log x$

J. van IJzeren

1 Inleiding

Dit artikel volgt een ongebruikelijke weg naar de exponentiële functies en de logaritmen. De clou is dat alle grafieken $y = a^x$, $0 < a \neq 1$, hun raaklijn uit O (zie fig. 4) raken op een parallel van de x-as: $y = \mathrm{e}$. Goede tekeningen tonen $\mathrm{e} \approx 2{,}7$. Meer decimalen zijn te vinden door zo'n raking stapsgewijs te benaderen. Maar net als bij π is numerieke precisie van minder belang dan de samenhang met functies. Die gaan dan ook voor.

Begonnen wordt met het grove ontwikkelingsmidel a^m, $m \in \mathbb{Z}$, dat zowel 'groei' ($a > 1$) als 'verval' ($0 < a < 1$) kan voorstellen. Grafische *verfijningen* leiden tot een definitie van a^x, $x \in \mathbb{R}$. De rekenregels voor exponenten worden bewezen.
Uiteenlopende functies a^x, b^x, ... representeren ontwikkelingen van verschillend *tempo*. De natuurlijke maatstaf hiervoor is de afgeleide in $(0, 1)$: $\ln a, \ln b, \ldots$ N.b. in dit kader wordt $\ln a$ gedefinieerd als '*helling* van $y = a^x$ in $(0, 1)$'. Het woord logaritme (= 'verhoudingsgetal') past daar goed bij.
De horizontale verwantschap tussen grafieken $y = a^x$, $y = b^x$ leidt tot bovenstaande definitie van e. Daarbij blijkt $\mathrm{e}^{\ln a} = a$, $\mathrm{e}^{\ln b} = b$, d.w.z. e^x en $\ln x$ zijn wederzijds inverse functies! Hetzelfde geldt voor 10^x en $\ln x/\ln 10 = {}^{10}\log x$. Berekeningswijzen voor 10^x en $^{10}\log x$, aansluitend bij het grafisch verfijnen, steunen op een numerieke basis, die het tweetallig stelsel tot achtergrond heeft.
De afgeleide van a^x is $a^x \cdot \ln a$, speciaal $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$. Zonder moeite volgen $(\ln x)'$ en $(x^r)'$, $r \in \mathbb{R}$. Zodoende is er tegelijk een vlot entree tot de differentiaalrekening. Geen wonder eigenlijk, want exponentiële functies, met hun evenredig aangroeien, zijn op het punt van 'mate van verandering' eenvoudiger dan veeltermen.
Deze stof wordt aanschouwelijk behandeld en toch – zonder ε – helemaal streng. Dit is van belang omdat vooraanstaande leerboeken in dit verband spreken van zekere ernstige moeilijkheden (zie § 9). Dat die er niet zijn, kan een goede leerling inzien. Het gebodene lijkt voldoende toegankelijk. Voor mindere broeders en zusters kan de strengheid gewoon opzij gezet worden (zie § 10). Het getal e, 'dat je kunt zien zitten', wordt in § 8 stapsgewijs benaderd. Het kleine rekenprogramma is niet moeilijk. Er zullen leerlingen genoeg zijn, die het leuk vinden e 'er uit te zien komen'.

2 Groei en verval

Uit een protestbrief van een leerling[1]: 'It all seems very odd to me, what *are* we to say (or even to think) about $2^{\sqrt{2}}$ or 2^{π}?'. Vermoedelijk slaat deze bevreemding ook wel eens in Nederland toe. Daarom eerst naar goede uitgangspunten.
De rij gehele machten van $a \neq 0$

$$..a^{-2}, a^{-1}, a^0 = 1, a, a^2, ..a^{m-1}, a^m, a^{m+1}, .. \qquad (1)$$

toont bij $a > 1$ '*groei*', *bij* $0 < a < 1$ 'verval'. Sluiten we andere waarden van a uit, dan geeft (1) bij lineaire interpolatie een grafiek (fig. 1), waarin elk hoekpunt *onder* het midden van aangrenzend tweetal ligt:

$$\tfrac{1}{2}(a^{m+1} + a^{m-1}) = a^m + \tfrac{1}{2}(a-1)^2 a^{m-1} > a^m.$$

De grafiek is dus convex, d.w.z. naar boven gewend. Als de lijnstukken naar weerskanten iets worden doorgetrokken, dan wordt onder elk een driehoekig gebied omlijnd. We noemen dit de 'speling' onder het lijnstuk. Zoals de figuur doet zien, kan elk punt van de speling als extra hoekpunt bij de grafiek worden betrokken *onder behoud van de convexiteit*. Deze tolereert een beperkte uitbouw naar beneden!

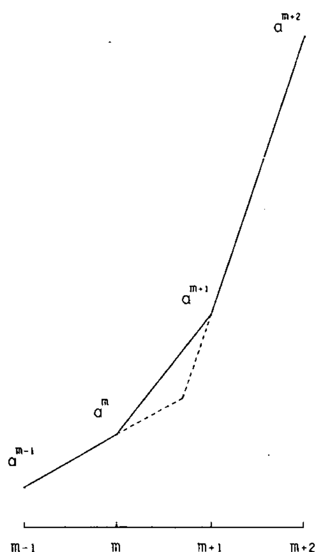
3 Meetkundig gemiddelde, verfijning van de grafiek

Bij het vormen van *gehele* machten van getallen $\neq$ 0, vermenigvuldigend maar ook delend ($1/a^n = a^{-n}$), gelden drie regels

$$a^k \cdot a^l = a^{k+l},\ (a^k)^l = a^{kl},\ (ab)^l = a^l \cdot b^l. \qquad (2)$$

Een en ander is gewoon een kwestie van groeperen, tellen en wegstrepen. Iets veel diepers komt aan de orde bij de 'middenevenredige', zoals in (1) bijv. a^m tussen zijn buren: $a^{m+1} : a^m = a^m : a^{m-1}$. Bestaat er zoiets tussen a^m en a^{m+1}? Algemener: bestaat er bij $a, b > 0$ een $c > 0$ zó dat $a : c = c : b$, of gemakkelijker geschreven: $ab = c^2$?
Dit is vanouds een zaak van passer en liniaal. Construeer $\triangle OPQ$ met rechte hoek O, $OP = \frac{1}{2}|a - b|$, $PQ = \frac{1}{2}(a + b)$, dan geldt

$$OQ^2 = PQ^2 - OP^2 = \tfrac{1}{4}(a + b)^2 - \tfrac{1}{4}(a - b)^2 = ab.$$

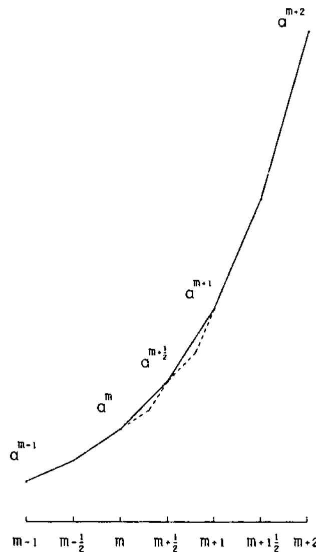


Figuur 1

Dus geeft OQ de gevraagde $\sqrt{ab}$. N.b. of we bijv. $\sqrt{2 \cdot 3}$ kunnen uitrekenen is niet de kwestie. We kunnen het 'meetkundig gemiddelde' *construeren* (§ 9a). Het is altijd kleiner dan het gewone gemiddelde (= PQ).

1 A. Gardiner, *Infinite Processes, Background to Analysis*, 1982, p. 286.

Construeer nu $\sqrt{a \cdot 1} = \sqrt{a}$. De kenmerkende eigenschap $(\sqrt{a})^2 = a$ komt door geschikte notatie, $a^{\frac{1}{2}}$ i.p.v. $\sqrt{a}$, onder het bereik van de regels (2): $a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}$, $(a^{\frac{1}{2}})^2 = a = a^{\frac{1}{2}\cdot 2}$, $(a^2)^{\frac{1}{2}} = a = a^{2\cdot\frac{1}{2}}$ en $(ab)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{2}}$, zoals volgt uit $((ab)^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{2}})\ ((ab)^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{2}}) = ab - a \cdot b = 0$.
Door $a^{\frac{1}{2}}$ te laten meedoen kunnen we de puntenrij (m, a^m) uitbreiden met $(m + \frac{1}{2}, a^{m+\frac{1}{2}})$. Deze punten liggen *onder* de lijnstukken tussen (m, a^m) en $(m + 1, a^{m+1})$. We trekken nu lijnstukjes tussen (m, a^m) en $(m + \frac{1}{2}, a^{m+\frac{1}{2}})$ resp. $(m + \frac{1}{2}, a^{m+\frac{1}{2}})$ en $(m + 1, a^{m+1})$ en *vlakken de 'oude' grafiek uit*. De nieuwe noemen we een 'verfijning'. Zoals de oude grafiek voortkwam uit de machten van a, zo ontstaat de verfijning uit de machten van $a^{\frac{1}{2}}$. Behalve in de punten (m, a^m) ligt de verfijning overal iets *lager*. Verder toont fig. 2 (n.b.): de spelingen onder de lijnstukjes van $(m + \frac{1}{2}, a^{m+\frac{1}{2}})$ naar (m, a^m) resp.



Figuur 2

$(^m + 1, a^{m+1})$ liggen beide helemaal *binnen* de speling onder het 'oude' lijnstuk van (m, a^m) naar $(m + 1, a^{m+1})$ in fig. 1.
Na $a^{\frac{1}{2}}$ kunnen we ook $(a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{4}}$ laten meedoen en vervolgens – in gedachten – onbeperkt verder verfijnen met $a^{\frac{1}{8}}, a^{\frac{1}{16}}, \ldots a^{\frac{1}{2}n} \ldots$

4 De limietgrafiek en de rekenregels

Zo'n met (m, a^m) opgezette, steeds verfijnende grafiek snijdt een verticaal $x = k$ in een veranderlijk punt. Dat kan niet stijgen, wel dalen. Het ligt op de bovenrand van successieve spelingen, die telkens binnen de voorafgaande liggen. Het punt nadert dus tot een limietpunt, dat *binnen alle betrokken spelingen* ligt (de onderranden *stijgen*; vgl. § 9b). Het limietpunt duiden we aan met (k, a^k), waarbij a^k vooralsnog geen 'macht' voorstelt, maar eenvoudig de (limiet-)hoogte boven de x-as.
Bij de verticaal $x = \frac{1}{3}$ is mooi te zien wat er gebeurt. De steeds kortere, snijdende lijnstukjes (bovenranden) liggen namelijk boven de intervallen

$$\langle 0, \tfrac{1}{2}\rangle, \langle \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}\rangle, \langle \tfrac{1}{4}, \tfrac{3}{8}\rangle, \langle \tfrac{5}{16}, \tfrac{3}{8}\rangle, \langle \tfrac{5}{16}, \tfrac{11}{32}\rangle, \langle \tfrac{21}{64}, \tfrac{11}{32}\rangle, \ldots \qquad (3)$$

Beurtelings gaat er van links en van rechts de helft af. Zo'n afwisseling is uitzondering! Is k een *binair* getal (noemer 2^n), dan stopt het proces. Neem bijv. $k = \frac{7}{16}$, dan is $(\frac{7}{16}, a^{\frac{7}{16}})$ hoekpunt van de 4de verfijning *en alle volgende*.
Zoals $a^{\frac{7}{16}} = (a^{\frac{1}{16}})^7$, zo is a^k bij binaire k altijd een *gehele* macht. Dit bedenkend komen we tot een belangrijke conclusie:

De regels (2) zijn geldig voor alle binaire k en l. (4)

Maar nu de Engelse leerling (zie § 2) met zijn 'what to say about $2^{\sqrt{2}}$ and 2^π?' We kunnen alvast zeggen: het zijn limieten, te vinden door de verticalen $x = \sqrt{2}$ en $x = \pi$ te snijden met de verfijningen door (1, 2), (2, 4), (3, 8), (4, 16). Maar zijn echte moeilijkheid zit dieper: waarom die notatie als 'machten' a^k? Antwoord: k is de *abscis* waar, via de verfijningen van (m, a^m), *de limiet* a^k wordt gevonden; en dan

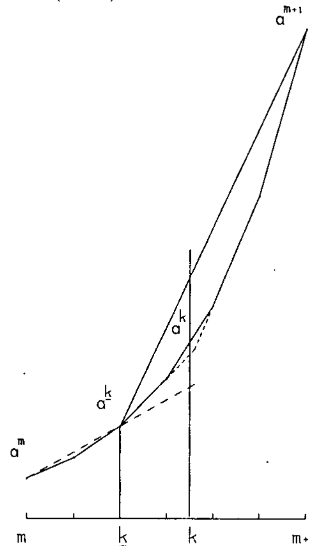
de limieten $a^k, .., b^l, (ab)^l$ voldoen aan de regels (2). (5)

We zullen dit bewijzen door k en l te benaderen met binaire k en l om zodoende vanuit (4) naar (5) te komen. Niet binair is bijv. $k = \frac{1}{3}$; we nemen dan voor de binaire k eerst bijv. $\frac{5}{16}$, dan $\frac{11}{32}$, daarna $\frac{21}{64}$, enzovoort.

Kortweg schrijvend $k \to k$ hebben we allereerst aan te tonen dat

Als $k \to k$, dan $a^k \to a^k$. (6)

Bewijs. Neem $m \in \mathbb{Z}$ zó dat $m < k < m + 1$ en een verfijning zó dat (k, a^k) hoekpunt is (zie fig. 3). Die verfijning bepaalt een speling met bovenrand boven (k, a^k) en onderrand er onder. Bijgevolg geven ook de lijnen van (k, a^k) naar (m, a^m) en $(m + 1, a^{m+1})$ snijpunten met $x = k$ *aan weerszijden* van (k, a^k). Gaat $k \to k$, dan nadert (k, a^k) tot beide, dus tot (k, a^k).



Figuur 3

En nu de limietovergang voor *de drie rekenregels* (vanuit (4) naar (5)).

$a^k \cdot a^l = a^{k+l} \to a^k \cdot a^l = a^{k+l}$, $(ab)^l = a^l \cdot b^l \to (ab)^2 = a^l \cdot b^l$.

Bij $(a^k)^l = a^{kl}$ gebruiken we $(a^k)^l = (a^k/a^k)^l \cdot (a^k)^l$. N.b. $a^k/a^k \to 1$.

$$(a^k/a^k)^l \cdot (a^k)^l \cdot (a^k)^l = a^{kl} \to 1\,(a^k)^l = a^{kl}.$$

Gaat $(a^k/a^k)^l \to 1$? Ja! Neem $n \in \mathbb{N}$ groter dan $\max |l|$. Dan is $-n < l < n$. Tussen de gehele machten $(a^k/a^k)^n$ en $(a^k/ak)^{-n}$ moet $(a^k/a^k)^l \to 1$.

De nu bewezen rekenregels brengen opheldering! Wat is bijv. de limiet $a^{\frac{1}{3}}$? Er geldt $a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, $a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{1}{3}} = a$, of ineens $(a^{\frac{1}{3}})^3 = a$. Dus is $a^{\frac{1}{3}}$ de derdemachtswortel uit a. Net zo met $a^{\frac{1}{n}}$.

But what to say about $(2^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$? Menigeen zal hier even stil zijn! Maar het is gewoon $2^2 = 4$ en dat is straks simpelweg in grafieken te zien. Dus, achteraf bekeken, gedragen de limieten a^k, b^l zich helemaal als machten. Ja, zijn het ook. Is $a^{\frac{2}{3}}$ geen kwadraat? Alles loopt normaal.

5 Raaklijnen aan $y = a^x$, de logaritme $\ln a$

Alle punten (k, a^k) met $0 < k < 1$ $(k \in \mathbb{R})$ liggen, naar eerder bleek, *binnen* de speling die links $(0, 1)$ tot hoekpunt heeft en $(1, a)$ rechts. Als nu $k \downarrow 0$, dan moet $a^k \to 1$. Duw ook $a^{-k} \to 1$. Algemeen: $a^{x+k} = a^x \cdot a^k \to a^x$ als $k \to 0$. In woorden: a^x is continu.
Terugkerend naar $(0, 1)$ beschouwen we de helling van de koorde naar (x, a^x):

$$\frac{a^x - 1}{x} = h(x), \quad x \neq 0.$$

Neem eerst binaire x_1, x_2 (< 0 of > 0). Bekijk een verfijning, waarin (x_1, a^{x_1}) en (x_2, a^{x_2}) als hoekpunten optreden. Als bijv. $x_1 < x_2$, dan geeft de convexiteit $h(x_1) < h(x_2)$. Tegelijk is $h(x)$ (evenals a^x) *continu*. Wat voor binaire x is geconstateerd, geldt dus algemeen: $h(x)$ *stijgt* (§ 9c).
Nu nog de lacune bij $x = 0$. Voor $x \uparrow 0$ stijgt $h(x)$ maar blijft $< (a-1)/1$. Er is dus een limiet, $\lim\limits_{x \uparrow 0} h(x)$, en die blijkt tweezijdig

$$\lim_{x \uparrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x \downarrow 0} \frac{a^{-x} - 1}{-x} =$$
$$= \lim_{x \downarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} / a^x = \lim_{x \downarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}.$$

De grafiek $y = a^x$ heeft dus in $(0, 1)$ een raaklijn! De helling daarvan is een *maat* voor de ontwikkeling, die door $y = a^x$ wordt voorgesteld.
Die maat heet de logaritme (= 'verhoudingsgetal'). We schrijven

$$\lim_{k \to 0} \frac{a^k - 1}{k} = \ln a.$$

Zo representeren $y = a^x$ en $y = (1/a)^x$ tegengestelde ontwikkelingen

$$\ln (1/a) = \lim_{k \to 0} \frac{(1/a)^k - 1}{k} = -\lim_{k \to 0} \frac{a^{-k} - 1}{-k} = -\ln a.$$

Bij $a = 1$ (tot nu toe uitgesloten) is er géén ontwikkeling: $\ln 1 = 0$.

Neem nu een willekeurig punt op $y = a^x$, dan is daar de groeisnelheid

$$\lim_{k \to 0} \frac{a^{x+k} - a}{k} = a^x \cdot \lim_{k \to 0} \frac{a^k - 1}{k} = a^x \cdot \ln a \qquad (7)$$

De groeisnelheid is dus de waarde a^x zèlf, maal de ontwikkelingsmaat. Door de uitkomst als quotiënt te schrijven, $a^x/(1/\ln a)$, vinden we:

> Alle raaklijnen aan $y = a^x$, gerekend van raakpunt tot snijpunt met de x-as, geven daarop projecties van de lengte $1/\ln a$. (8)

De logaritme is de momentane toename per eenheid. Daarom is de toename van a^x rond $x = 0$, over het interval $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, een benadering:

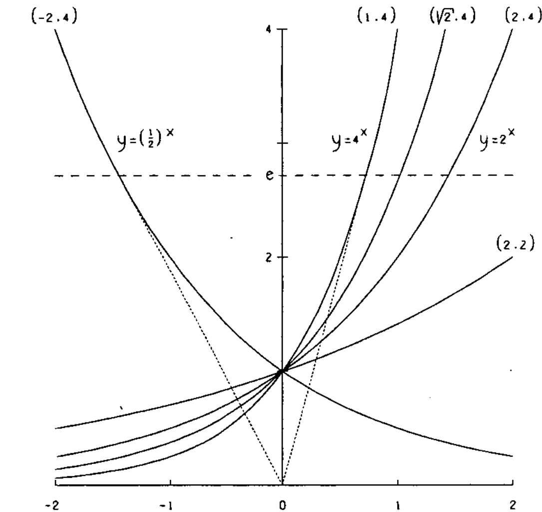
$$\ln a \approx a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}}.$$

Bijv. $\ln 2 \approx 2^{\frac{1}{2}} - 2^{-\frac{1}{2}} = 2^{-\frac{1}{2}} = 0{,}71$;
$\ln 3 \approx \frac{2}{3}^{\frac{1}{2}} = 1{,}15$; $\ln 4 \approx 1{,}50$.
Dit klopt maar matig, want $\ln 4$ moet $2 \cdot \ln 2$ zijn ($y = 4^x$ toont een tweemaal zo snelle ontwikkeling als $y = 2^x$). *De werkelijke waarden zijn:* 0,69; 1,10; 1,39. Hoe dichter a bij 1, hoe beter benadering: $1{,}21^{\frac{1}{2}} - 1{,}21^{-\frac{1}{2}} = \frac{11}{10} - \frac{10}{11} = \frac{21}{110} = 0{,}1909$, terwijl $\ln 1{,}21 = 0{,}1906$.
Dichter bij 1 komt men door herhaald worteltrekken. Het is dan ook slim om op $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ over te gaan en $2(a^{\frac{1}{4}} - a^{-\frac{1}{4}})$ als benadering te nemen. Uit $\ln 4 \approx 2(4^{\frac{1}{4}} - 4^{-\frac{1}{4}}) = 1{,}41$ blijkt het succes. Enzovoort, wie wil kan $\ln a$ al worteltrekkend goed berekenen.

6 Het getal e, de inverse functies $\ln x$ en e^x

De grafiek $y = 4^x$ bereikt sneller, nl. bij tweemaal zo kleine x, dezelfde hoogte als $y = 2^x$ (immers

$4^{\frac{1}{2}x} = 2^x$). Drukt men de grafiek $y = 2^x$ niet tweemaar $\sqrt{2}$-voudig samen (naar de y-as), dan ontstaat $y = 2^{\sqrt{2}x} = (2^{\sqrt{2}})^x$ en het punt $(\sqrt{2}, (2^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$ op deze kromme is kennelijk $(\sqrt{2}, 4)$ (zie fig. 4). Tweevoudige rek t.o.v. de y-as geeft $y = \sqrt{2}^x$, spiegeling $y = (\frac{1}{2})^x$.
Deze 'horizontale' verwantschap bekijken we nu algemeen.
Neem een kromme $y = a^x$, $0 < a \neq 1$. Deze en de



Figuur 4

grafiek $y = 2^x$ snijden $y = a$ in $(1, a)$ resp. (r, a), het limietsnijpunt met de verfijningen van $(m, 2^m)$.
Er geldt dus $a = 2^r$ en de abscissen verhouden zich als $1 : r$. Maar dat doen, telkens op dezelfde hoogte, alle abscissen: bij (s, a^s) op $y = a^x$ hoort (rs, a^s) op $y = 2^x$, immers $a^s = 2^{rs}$. Elke kromme $y = a^x$ is dus door horizontale schalaire vermenigvuldiging over te brengen in $y = 2^x$ en dus in elke andere kromme $y = b^x$. Bij zulke afbeeldingen gaat de raaklijn uit O mee! De raakpunten liggen dus alle op een horizontale rechte, stel $y = e$.
Wat e ongeveer is, blijkt bij $y = 2^x$. De punten $(1, 2)$ en $(2, 4)$ liggen op een koorde door O. De raaklijn door O zal ongeveer halverwege – in $(1\frac{1}{2}, 2\sqrt{2})$ – raken. Dat geeft e $\approx$ 2,8. In § 8 gaan we preciseren.

Er volgen nu belangrijke algemene resultaten.
De raaklijn uit O aan $y = a^x$ geeft – als alle andere – $1/\ln a$ als projectie op de x-as. Het raakpunt is dus $(1/\ln a, a^{1/\ln a})$ met $a^{1/\ln a} = e$. Dus

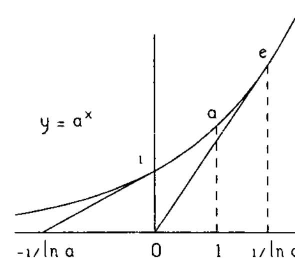
$$e^{\ln a} = a \text{ (ook voor } a = 1) \tag{9}$$

Hieruit volgt voor e zelf: $e^{\ln e} = e$, dus $\ln e = 1$. De kromme $y = e^x$ kan dus worden gezien als een standaard: de ontwikkelingsmaat is 1.
Een kromme $y = (e^b)^x = e^{bx}$ ontstaat uit $y = e^x$ dior de abscissen met $1/b$ te vermenigvuldigen. Dat geeft in $(0, 1)$ de helling b:

$$\ln(e^b) = b. \tag{10}$$

In woorden: $(e^b)^x$ heeft de ontwikkelingsmaat b; net zo: $(e^{\ln a})^x$ heeft de ontwikkelingsmaat $\ln a$ en is dus a^x. Hoe a en $\ln a$ rechtstreeks samenhangen blijkt in fig. 5.
De formules (9) en (10) houden in dat de grafiek $y = \ln x$ het spiegelbeeld is van $y = e^x$ t.o.v. de as $y = x$. Immers als (a, b) op $y = \ln x$ ligt, dus als $b = \ln a$, dan is volgens (9) $e^b = a$, d.w.z. (b, a) ligt op $y = e^x$. En omgekeerd volgt uit het laatste, zie (10), dat $\ln a = b$.
De rekenregels hebben hun weerslag op de logaritmen:

$$\begin{aligned} &\text{uit } e^{\ln ab} = ab = e^{\ln a} \cdot e^{\ln b} = e^{\ln a + \ln b} \text{ volgt} \\ &\ln ab = \ln a + \ln b; \\ &\text{uit } e^{\ln a^b} = a^b = (e^{\ln a})^b = e^{b \ln a} \text{ volgt} \\ &\ln a^b = b \ln a \quad \text{(al gebruikt bij } a = e). \end{aligned} \tag{11}$$



Figuur 5

Men kan de grafiek $y = e^x$ samendrukken (naar de

y-as) tot $y = 10^x$. De bijbehorende inverse functie ontstaat uit $y = \ln x$ door dezelfde samendrukking naar de x-as. Dat geeft de 'logaritmen met grondtal 10', ${}^{10}\log x = \ln x/\ln 10$. Daarvoor gelden omkeerformules zoals (9) en (10):

$$10^{{}^{10}\log x} = (10^{1/\ln 10})^{\ln x} = e^{\ln x} = x \quad \textit{resp.}$$
$$ {}^{10}\log (10^x) = \ln (10^x)/\ln 10 = x.$$

De ${}^{10}\log$ hoort bij het 10-tallig stelsel' Allerlei waarden liggen voor de hand: ${}^{10}\log 100 = 2$, ${}^{10}\log 0{,}001 = -3$. Uit
${}^{10}\log (2^{10}) = {}^{10}\log 1024 \approx 3$ volgt ${}^{10}\log 2 \approx 0{,}3$. Dat geeft $\ln 2/\ln 10 \approx 0{,}3$ en dus voor de samendrukkingsfactor:
$1/\ln 10 \approx 0{,}3/\ln 2 = 0{,}3/0{,}69 = 1/2{,}3 = 0{,}43$.
Het gaat ook bij ${}^{10}\log x$ om de regels (11). Zij zijn wel drie eeuwen hèt hulpmiddel geweest om de vermenigvuldiging ab te vereenvoudigen tot de optelling ${}^{10}\log a + {}^{10}\log b$ en om a^b uit te rekenen. Steeds met behulp van de logaritmen*tafel*. Hoe men zonder tafel (calculator) 10^x resp. ${}^{10}\log x$ kan berekenen (althans in beginsel) is heel illustratief. Het wordt hier kort weergegeven als voorbeeld van *verfijnend* benaderen (vgl. § 4).

Bepaal vooraf de wortels $10^{\frac{1}{2}}$, $10^{\frac{1}{4}}$, enz. Dat geeft een tabel van

wortels	10	3,162	1,778	1,334	1,155	1,075	1,037	1,018	1,009	1,005	1,002
helften	1	0,500	0,250	0,125	0,063	0,031	0,016	0,008	0,004	0,002	0,001

Vindt nu bijv. $10^{0.204}$. Dan moet 0,204 worden gesplitst in helften (= geschreven als binair getal):

$$10^{0.204} = 10^{0.125+0.063+0.016} =$$
$$= 1{,}334 \cdot 1{,}155 \cdot 1{,}037 = 1{,}598.$$

Omgekeerd: vind bijv. ${}^{10}\log 2$. Dan moet 2 worden 'ontbonden' in de wortels (eerst 2 delen door de grootst mogelijke wortel, enz.):

$$2 = 1{,}778 \cdot 1{,}075 \cdot 1{,}037 \cdot 1{,}009 =$$
$$= 10^{0.250+0.031+0.016+0.004} = 10^{0.301}.$$

Dus ${}^{10}\log 2 = 0{,}301$. Dit klopt met het voorgaande, want

$$0{,}204 = 4 \cdot 0{,}301 - 1 =$$
$$= 4 \cdot {}^{10}\log 2 - {}^{10}\log 10 = {}^{10}\log 1{,}6.$$

Tot zover het heen en weer vertalen van getal (> 0) en ^{10}logritme.
Bij een ander talstelsel passen andere logaritmen. Zo hoort bij binair rekenen: ${}^{2}\log x = \ln x/\ln 2$. In beginsel kan elk getal a met $0 < a \neq 1$ als grondtal worden genomen: ${}^{a}\log x = \ln x/\ln a$. Maar elke dergelijke logaritmische functie is op een vaste factor na gelijk aan de oorspronkelijke $\ln x$ (vgl. § 9d). Het getal e is a.h.w. het natuurlijke grondtal.

7 Differentiaalrekening

Gebleken is al dat $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$, speciaal dus $(e^x)' = e^x$. Blijkbaar geeft $y = e^x$ raaklijnprojecties op de x-as, die constant 1 zijn. Net zo geeft $y = \ln x$ raaklijnprojecties op de y-as, die constant 1 zijn. D.w.z.

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Bij $(1, 0)$ vinden we dus $\lim\limits_{k\to 0} \frac{\ln(1+k)}{k} = 1$, d.w.z. de raaklijn heeft de helling 1. Verder leidt $k = \frac{x}{n}$ blijkbaar tot $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot \ln(1 + \frac{x}{n}) = x$, d.i. het welbekende $(1 + \frac{x}{n})^n \to e^x$.
Gemakkelijk vinden we nu $(x^r)'$ voor $r \in \mathbb{R}$ en $x > 0$ (zoals eerder steeds $a > 0$ is verondersteld):

$$x^r = (e^{\ln x})^r = e^{r \ln x},$$
$$(x^r)' = e^{r\ln x} \cdot \frac{r}{x} = rx^{r-1},$$
$$x > 0.$$

Hierbij valt op te merken dat in het bovenstaande

nergens is aangenomen, dat $(x^n)' = nx^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, al bekend zou zijn. De exponentiële functies bieden, met hun simpel evenredig aangroeien, eigenlijk goede beginstof. Als men al vroeg met $(x^r)' = x^r \cdot \frac{r}{x}$ kennismaakt, dan wordt iets weggenomen van het trukendoos-imago dat de differentiaalrekening maar al te gauw krijgt. De beginner ziet 'waarom' de macht r een factor wordt en tegelijk met één vermindert. Natuurlijk moet $(x^m)' = mx^{m-1}$, $m \in \mathbb{Z}$, later nog eens bekeken worden om van de conditie $x > 0$ af te komen.
Wordt er met $(x^m)'$ en $(x^{m/n})'$ niet een nodeloze initiatieritus bedreven? Het enige direct aansprekende geval is $(x^2)'$, dat ook voor de natuurkunde (eenparige versnelling) meteen nodig is. Zou het niet animerend werken zich in eerste instantie te beperken tot x^2, $\sin x$, $\cos x$ en a^x, waarop praktijkvoorbeelden voor de hand liggen?

$$p = (x_1{}^2 y_2 - x_2{}^2 y_1)/(x_1{}^2 - x_2{}^2),$$
$$q = (y_1 - y_2)/(x_1{}^2 - x_2{}^2).$$

Stel nu dat ook $y = 2^x$ door (x_1, y_1) en (x_2, y_2) gaat, dan vinden we daaruit een derde punt (x_*, y_*), hopelijk in de buurt van $(.., e)$:

$$x_* = \sqrt{p/q} = \quad ((x_1{}^2 y_2 - x_2{}^2 y_1)/(y_1 - y_2))^{\frac{1}{2}},$$
$$y_* = 2^{x_*} \qquad (12)$$

Aldus hebben $(1, 2)$ en $(2, 4)$ geleid tot $(\sqrt{2}, 2^{\sqrt{2}})$. Al naar x_* dichter bij x_1 dan bij x_2 ligt, maken we het punt (x_*, y_*) tot een 'nieuw' punt (x_2, y_2) dan wel (x_1, y_1). Vervolgens geeft het paar (x_1, y_1), (x_2, y_2) een 'nieuw' (x_*, y_*), enzovoort.
Dank zij de handcalculator kan zo'n berekening vlot, met een programmatje, worden uitgevoerd. Gevonden werd (tegelijk voor $y = 3^x$) tabel 1.

Tabel 1

x	$y = 2^x$	$2p \approx y$	x	$y = 3^x$	$2p \approx y$
1	2		1	3	
2	4		2	9	
1,414214	2,665144	2,666667	0,717107	2,174581	2,000000
1,416639	2,669629	2,669712	0,904024	2,699785	2,698326
1,442437	2,717796	2,717802	0,908897	2,714275	2,714297
1,442615	2,718132	2,717132	0,910230	2,718255	2,718255
1,442696	2,718284	2,718285	0,910239	2,718281	2,718280
1,442694	2,718281	2,718283	(0,910253	2,718324	2,718370)

8 Stapsgewijze benadering van e

De kromme $y = 2^x$ gaat door $(1, 2)$ en $(2, 4)$ en raakt de raaklijn uit O in $(.., e)$ Nu gaat door $(1, 2)$ en $(2, 4)$ óók de parabool $y = \frac{4}{3} + \frac{2}{3}x^2$. Deze raakt $y = \frac{4}{3}\sqrt{2}x$ in $(\sqrt{2}, \frac{8}{3})$. Beide coördinaten leveren een benadering van e, namelijk $2^{\sqrt{2}} = 2{,}665$ en $\frac{8}{3} = 2{,}667$. De aansluiting met $y = 2^x$ lijkt goed. Maar de parabool $y = p + qx^2$ door $(1, 2)$ en $(\sqrt{2}, 2^{\sqrt{2}})$ doet het vermoedelijk beter. En zo maar door? Dat wordt nu bekeken.
Gemakkelijk is na te gaan dat $y = p + qx^2$ raakt aan $y = 2\sqrt{pq}\,x$ in $(\sqrt{p/q}, 2p)$. Zo'n parabool is, we zagen het al, door twee punten (x_1, y_1), (x_2, y_2) bepaald: uit $y_1 = p + qx_1{}^2$, $y_2 = p + qx_2{}^2$ volgt

Resultaat: e = 2,71828.. Bij $y = 3^x$ blijkt onderaan, dat het proces gestoord wordt, als opvolgende punten erg dicht bij elkaar liggen. Dan worden in (12) teller en noemer klein en dus behept met een relatief grote afrondingsfout. Maar in principe kan men, rekenend in voldoende decimalen (meer dan 9), verder komen. De laatste stap bij $y = 3^x$ blijkt in werkelijkheid te zijn
2,7182808358 → 2,7182818284, een verbetering met *vier* juiste decimalen (t/m de 9e)!
Dit alles is niet geschikt voor grafische uitbeelding. Zelfs de eerste parabool $y = \frac{4}{3} + \frac{2}{3}x^2$ ligt tussen $(1, 2)$ en $(2, 4)$ al haarscherp op $y = 2^x$. De krommen hebben dan ook een tussenliggend snijpunt, namelijk $(1{,}373, 2{,}590)$. Bij de volgende parabolen

naderen de drie snijpunten gezamenlijk tot $(1/\ln 2, e)$. Dit wordt bevestigd door 9e.

9 Toelichting

In didactische litteratuur – daar hoort op hoog niveau ook Hardy's Pure *Mathematics* toe – wordt vaak de integraal van t^{-1} gebruikt om $\ln x$ en vervolgens e^x en a^x te definiëren. Voor een beginner is dat een vreemde omweg. Vandaar dat leerboeken orakelen over 'moeilijkheden', die zij langs die omweg omzeilen. Bijvoorbeeld: T.M. Apostol, *Calculus* p. 174: 'the process to overcome the difficulties is long and tedious'; R. Courant and F. John, *Introduction to Calculus and Analysis* p. 52: 'it is customary to pass over certain inherent difficulties'. Zij willen het goed doen, maar zien geen didactisch begaanbare, directe weg.

De omweg wordt een dwaalweg in W.M. Priestley's *Calculus: An Historical Approach.* Dit van veel toewijding getuigende werk presenteert de beginselen van Calculus aan α-studenten. In het voorlaatste hoofdstuk bereikt men 'The Central Height', waar genoemde integraal floreert. Dan even e^x en meteen bergafwaarts naar samengestelde interest, bevolkingsgroei en radioactief verval. In plaats van groei en verval te gebruiken als *direct* entree tot a^x – heel instructief voor students in liberal arts – maakt de auteur een hoge mist van integraal en omkering.

a Het hanteren van passer en liniaal is serieus bedoeld. Waar het om gaat, is niet dat $\sqrt{ab}$ benaderd kan worden, maar dat $\sqrt{ab}$ 'er ineens is', per passer op de lijn ingesneden. In de algebra ziet men hetzelfde. Aan $\mathbb{Q}$ kan bijv. $\sqrt{2}$ worden toegevoegd. Deze 'adjunctie' creëert een nieuw omvattend rekenstelsel (het lichaam $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$).

Soms heeft men voldoende aan $\mathbb{Q}$ zonder meer. Denk aan eenvoudige renterekening (model a^m, $m \in \mathbb{Z}$; $a = 1 + \frac{r}{100}$; lineair interpoleren).

Aan de andere kant leveren onbeperkt veel adjuncties, zoals de verfijningen die meebrengen, nog niet de verzameling der reële getallen.

Daarvoor is een speciale eis nodig. Zie b.

b Er zijn diverse middelen om vanuit de rationale getallen tot de reële te komen. Het eenvoudigste is wel: de monotone begrensde rij.

Een voorbeeld. Het is duidelijk dat bijv. $\sqrt{7}$ niet in $\mathbb{Q}$ voorkomt. Maar neem nu: $\frac{1}{2}(1 + 7) = a_1$, $\frac{1}{2}(a_1 + \frac{7}{a_1}) = a_2$, enz. Dat geeft een dalende, begrensde rij. Alles rationaal. Een limiet $(\sqrt{7})$ ontbreekt. We eisen het bestaan er van. Die eis, algemeen bij elke monotone begrensde rij gesteld, creëert $\mathbb{R}$. Juist deze eis komt bij de verfijningen te pas en daarna ook bij $y = a^x$, als het gaat om de limietstand der koorden door $(0, 1)$.

Bij de verfijningen valt nog op te merken, dat de successieve spelingen op elke verticaal $x = k$ $(\notin \mathbb{Z})$ een intervallen-nest insnijden. Zulke nesten bieden kennelijk ook een mogelijkheid om $\mathbb{R}$ te definiëren.

c Het stijgen van $h(x) = (a^x - 1)/x$ (óók als $0 < a < 1$) is een makkelijk te onthouden eigenschap die nog al eens te pas komt. Drie voorbeelden:

1 $\ln a$ stijgt met a, maar $\lim_{a \to \infty} (\ln a/a^\delta) = 0$ voor elke $\delta > 0$, hoe klein ook.
Bewijs: $\ln a = h(0) < h(\frac{1}{2}\delta) = (a^{\frac{1}{2}\delta} - 1)/\frac{1}{2}\delta$, dus $\ln a/a^\delta < (a^{\frac{1}{2}\delta} - 1)/\frac{1}{2}\delta a^\delta \downarrow 0$.

2 De ongelijkheid van Bernoulli: $a^p > 1 + p(a - 1)$, met $1 < p \in \mathbb{R}$.
Bewijs: Voor $p > 1$ is
$(a^p - 1)/p = h(p) > h(1) = a - 1$. (Ook voor $a < 1$!)

3 Voor $c > 0$ stijgt $(1 + c/n)^n$ met n.
Bewijs: Stel $\ln(1 + c/n) = x$, dan is $n \cdot \ln(1 + c/n) = c \cdot x/(e^x - 1)$. Dit stijgt als x daalt, dus als n stijgt. Voor $c < 0$ stijgt $(1 + c/n)^n$ overigens evengoed, zodra $n + c > 0$. Duidelijk is dat x nu stijgt, als n stijgt.

d Raaklijnen uit O aan logaritmische grafieken.
Alle grafieken $y = {}^a\log x$ hebben in $(e, {}^a\log e)$ een raaklijn door O. Immers $({}^a\log x)' = 1/x \ln a$, zodat de raaklijn wordt: $y - {}^a\log e = (x - e)/e \ln a$. Deze gaat wegens ${}^a\log e = \ln e/\ln a = 1/\ln a$ door O.

e Driepuntige raking van $y = e^{bx}$ en $y = \frac{1}{2}e + \frac{1}{2}eb^2x^2$ in $(\frac{1}{b}, e)$.

Inderdaad vindt men bij $x = \frac{1}{b}$ voor y, y' en y'': e, eb en eb^2, maar voor y''' komt er eb^3 respectievelijk 0. Het verschil is dus $\approx \frac{1}{6}eb^3(x - \frac{1}{b})^3 = \frac{1}{6}e(bx - 1)^3$. In de functies verschijnt b als factor bij x. Verander-

ing van b geeft de 'horizontale' afbeeldingen van §6. Die nemen óók de rakende parabolen mee.

10 Schets van didactische mogelijkheden

Wat biedt het behandelde voor de didactische praktijk?
Als gebruikelijk begint alles met $a, a^2, a^3, ..$ Lineaire interpolatie en 'verfijning' leveren vervolgens een tekenfilm, die uitloopt op het beeld van $y = a^x$. Vooral $a = 2, 4, \sqrt{2}$ en $\frac{1}{2}$ zijn illustratief. De rekenregel $(a^k)^l = a^{kl}$ moet een vertouwde zaak worden (binaire k, l allereerst).
De convexiteit is een visuele vertaling van de (vaak te pas komende!) ongelijkheid: 'rekenkundig gemiddelde > meetkundig gemiddelde'.
Tot zover gaat het alleen maar om wat franje bij de gebruikelijke stof rond $y = a^x$.
Maar nu komt iets heel anders: géén omkering naar ${}^a\log x$, maar aandacht voor het *tempo* van ontwikkelingen $y = a^x$, $y = b^x$. De natuurlijke maatstaf is de *helling* in (0, 1), aan te duiden met $\ln a$, $\ln b$. Allicht moet er bij 'ln' worden verteld, dat logaritme een antiek woord is voor 'verhoudingsgetal', wat in dit verband neerkomt op 'helling'.
Hoofdeigenschap: $\ln(a^r) = r \cdot \ln a$. Het bewijs is simpel. Grafisch gezien ontstaat $y = (a^r)^x = a^{rx}$ uit $y = a^x$ door r-voudige samendrukking (aangenomen $r > 1$). Koorden vanuit (0, 1) en de raaklijn in (0, 1) worden daarbij r maal zo steil. In woorden: een r maal zo snelle ontwikkeling heeft een r maal zo grote logaritme (helling).
Hierna vraagt men allicht naar het getal, stel e, waarvoor $\ln e = 1$, zodat e^x a.h.w. de *standaard*-ontwikkeling voorstelt.
Welnu, de onbekende kromme $y = e^x$ raakt de lijn door $(-1, 0)$ en $(0, 1)$. Dus óók die door $(0, 0)$ en $(1, e)$ (horizontale translatie en verticale rek). Trek de overeenkomstige raaklijn aan $y = 2^x$. Het raakpunt ligt op gelijke hoogte (horizontale rek). De tekening toont $e \approx 2{,}7$.
Dan iets erg plezierigs: $\ln x$ blijkt de inverse functie van e^x.
Er geldt immers $\ln(e^r) = r$. Meer uitgewerkt: als (r, s) op $y = e^x$ ligt, dan (s, r) op $y = \ln x$. Dus andersom: $e^{\ln s} = s$. Dit laatste leidt tot $\ln(ab) = \ln a + \ln b$. Hieruit volgt $\ln(a^n) = n \cdot \ln a$ in overeenstemming met $\ln(a^r) = r \cdot \ln a$. Veel aandacht hoeft ln overigens niet te krijgen. De grafiek $y = \ln x$ is – na $y = e^x$ – een eenvoudige zaak (raaklijnprojecties ter lengte 1 op de y-as!). Het is nuttig even stil te staan bij benaderingen: $\ln 2 = 0{,}7$; $\ln 20 = 3$; $\ln 10 = 2{,}3$.
Vervolgens: grafisch en numeriek naar het einddoel ${}^{10}\log x$.
Verander de grafieken $y = e^x$ en $y = \ln x$ door gelijkelijk horizontaal en verticaal sàmendrukken in $y = 10^x$ $(= e^{x \ln 10})$ en $y = \ln x / \ln 10 = {}^{10}\log x$.
Verifieer dat 10^x en ${}^{10}\log x$ elkaars inverse zijn. Meer nog: als elkaars inverse kunnen beide functies tegelijk numeriek worden bepaald. De berekeningswijze sluit aan op het 'grafisch verfijnen' en steunt (met wortels en helften) op het tweetallig stelsel (nuttig i.v.m. informatica).
Natuurlijk moet ${}^{10}\log x$ door uitgebreide behandeling vertrouwde stof worden. Andere grondtallen zijn onnodige last. Maar e is, net als π, een intrigerend getal, dat juist animerend kan werken.
Een belangrijk punt is nog het argeloos binnenstappen in de differentiaalrekening met $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$ en al wat daaraan vastzit. Dit kan heel wat besparen op de gebruikelijke behandelingen.

De auteur dankt H. Willemsen voor de per computer gemaakte figuren.

Over de auteur:

Van IJzeren is werkzaam geweest als instructeur aan de T.H. Eindhoven en als statisticus aan het C.B.S. Hij is thans gepensioneerd.

Korrel

De derde opgave van het tweede termijn examen wiskunde I in 1985 luidde als volgt:

Gegeven zijn de vazen V_1 en V_2.
V_1 bevat k groene en n rode knikkers.
V_2 bevat 8 groene en n rode knikkers.

a Neem $k = 18$ en $n = 2$.
Men trekt aselect één knikker uit V_1 en één knikker uit V_2. Bereken de kans dat de twee getrokken knikkers verschillend van kleur zijn.

b Neem $k = 18$.
Men trekt aselect één knikker uit V_1 en één knikker uit V_2. Voor welke $n \in \mathbb{N}$ is de kans dat de twee getrokken knikkers verschillende kleur hebben maximaal? Bereken deze kans.

c Neem $n = 2$.
Men trekt na elkaar en met terugleggen tien maal één knikker uit V_1. Het aantal rode knikkers dat voorkomt in deze reeks van tien trekkingen is een stochast X. Het nummer van de trekking waarbij voor de tweede maal een rode knikker wordt getrokken is een stochast Y.
Bereken c in het geval dat $P(X = 2) = c \cdot P(Y = 10)$.

Het is nu niet mijn bedoeling om kritiek te leveren op de aard van de opgave. Per slot van rekening is het nog geen wiskunde A en in wiskunde I hadden we nu eenmaal om de paar jaar zo'n som: In 1976 kregen we een vaas voorgezet met k rode en n blauwe dobbelstenen, waarbij we onder de aanname $n = k + 4$ een kans moesten minimaliseren; in 1980 betrof het een vaas met k^2 gekleurde balletjes, waarbij we een paar ongelijkheden in k moesten oplossen.
Mijn bezwaar betreft de c-vraag: De stochast Y is hier niet gedefinieerd en dùs kan ik $P(Y = 10)$ niet berekenen. Dit maakt de opdracht onmogelijk.
De opgave zou correct zijn geweest met bijvoorbeeld de toevoeging: Indien er uitsluitend groene of slechts één rode knikker wordt getrokken krijgt Y de waarde 11 (of 0 of iets dergelijks).
Een andere mogelijkheid is:
Men trekt na elkaar en met teruglegging knikkers uit V_1. Het aantal rode knikkers bij de eerste tien trekkingen is een stochast X. Het nummer van de trekking waarbij voor de tweede maal een rode knikker wordt getrokken is een stochast Y.
In het laatste geval heeft Y als waardenbereik $\{2, 3, 4, ...\}$ met de kansverdeling

$$P(Y = y) = (y - 1) \cdot \left(\frac{2}{k + 2}\right)^2 \left(\frac{k}{k + 2}\right)^{y-2},$$

een 'verschoven' negatief-binomiale verdeling.
Tenslotte zou de fout ook niet zijn gemaakt als men de opgave in termen van gebeurtenissen in plaats van stochasten zou hebben geformuleerd.

Wout de Goede

Boekbespreking

Stukjes van een puzzel, een vraagbaak voor de wiskunde docent.

Kadergroep wiskunde

Het Integratieproject Scholengemeenschappen (ISG-project) begeleidt scholen bij de realisatie van een tweejarige heterogene brugperiode. De begeleiding van het ISG-project bestaat onder andere uit vakgerichte ondersteuning aan wiskunde secties en wiskunde leerkrachten.
Een negental wiskunde leerkrachten, een vertegenwoordiger van de Landelijke Pedagogische Centra en een vertegenwoordiger van de Stichting Leerplan Ontwikkeling vormen samen de kadergroep wiskunde.
De kadergroep wiskunde verzorgt werkbijeenkomsten en conferenties voor wiskunde leerkrachten en heeft in de serie 'Informatie Reeks Integrerende Scholengemeenschappen', die wordt uitgegeven door de Landelijke Pedagogische Centra, nu een boekje laten verschijnen. De titel is 'Stukjes van een puzzel. Een vraagbaak voor de wiskunde docent.' De titel geeft aan dat het om een boekje gaat vol praktische informatie. Een schat aan voorbeelden gegroepeerd rond een zevental thema's laat zien hoe een school, een wiskunde sectie of leerkracht oplossingen zoeken en vinden voor de realisatie van hun ideeën in het onderwijs. De voorbeelden zijn afkomstig van wiskunde leraren op een tiental scholen. De concrete ervaringen worden afgedrukt naast samenvattingen en commentaren. Voors en tegens worden genoemd, maar de leraar kan vanuit zijn eigen school- en werksituatie een keuze maken welke gevonden oplossingen van belang zijn.
Een van de onderwerpen is leerstof kiezen.
In dit puzzelstukje of hoofdstuk staat beschreven waar leerkrachten zoal op letten bij de keuze van hun leerstof, welke eisen ze aan leerstof stellen, waar leerkrachten geschikte leerstof vinden, wat de voor- en nadelen zijn van het zelf schrijven van leerstof, hoe de keuze van de leerstof samenhangt met de werkvormen in de klas en de manier waarop leerkrachten omgaan met de verschillen in de klas. Voor een groot gedeelte vindt de beschrijving plaats door middel van interviews afgewisseld met commentaar.

Andere onderwerpen die in het boekje aan de orde komen zijn:
- Fusie kleine school/grote school
- Differentiatie
- Toetsen, rapportage en determinatie
- Aansluiting onder- en bovenbouw
- Werken met groepen
- Invloeden van buitenaf op een school.

Het boekje wordt afgesloten met een hoofdstuk met beschrijvingen van onderwijs leerpakketten en een hoofdstuk met een overzicht van aanvullende literatuur.

Het boekje kost ƒ9,90 en is te bestellen bij het APS, Postbus 7888, 1008 AB Amsterdam o.v.v. 'Stukjes van een puzzel. Een vraagbaak voor de wiskunde docent.'

Mededeling

VVWL-studiedag Wilrijk, 16 november 1985

De VVWL, in samenwerking met de Universiteit Antwerpen (U.I.A.), houdt op *zaterdag 16 november 1985* een studiedag in de Aula van de Universitaire Instelling Antwerpen, Universiteitsplein, 2610 Wilrijk over het onderwerp:
Programmeertalen en programmeeromgevingen voor het Secundair Onderwijs:
Elan, Gestructureerde Basic, MicroPascal.

Agenda:
Vanaf 9.15: ontvangst van de deelnemers
9.45: opening door voorzitter Frank Laforce
9.50 Chris De Graeve, adjunct-kabinetchef van de Minister van Onderwijs: *Situatie van informatica-onderricht in het onderwijs.*
10.05: prof. dr. Johan Lewi (Katholieke Universiteit Leuven): *Kennismaking met Elan.*
10.50: koffiepauze
11.15: Walter Boogers (HORITO Turnhout): *Kennismaking met gestructureerde Basic.*
12.00: prof. dr. Jan Paredaens (Universitaire Instelling Antwerpen): *Kennismaking met MicroPascal.*
12.45: lunch
14.15: Panelgesprek: 'vergelijking van de drie programmeertalen' met Walter Boogers, HORITO Turnhout
Reinilde Claessens, Koninklijke Atheneum Laken
prof. dr. Theo D'Hondt, V.U.B.
Georges Janssens, Sint-Jozef Klein Seminarie Sint-Niklaas
prof. dr. Johan Lewi, K.U.L.
prof. dr. Jan Paredaens, U.I.A.
Moderator: Henk Olivié, I. H. A. M., wetenschappelijk begeleider van de bijscholing informatica aan de U.I.A. Tegelijkertijd in drie lokalen doorlopende demonstraties met de drie programmeertalen.
15.30: pauze
15.45: parallel in drie lokalen demonstraties met de drie programmeertalen.
17.00: sluiting

Wie aan de gemeenschappelijke lunch in het restaurant van de U.I.A. deel wil nemen, wordt verzocht zich tijdig en in elk geval vóór 1 november 1985 aan te melden door overschrijving van 270 fr. (drank en bediening inbegrepen) op prk. 000-1116247-68 van VVWL, Hoge Aardstraat 44, 2610 Wilrijk, onder vermelding 'lunch 16/11/85'.
Treinreizigers nemen aan het Antwerps Centraalstation de autobus 17 met bestemming U.I.A. en stappen af bij gebouw D.

Boekbespreking

De 10[e] jaargang van Wiskunde en Onderwijs, driemaandelijks tijdschrift van de Vlaamse Vereniging van Wiskundeleraars.

De jaargang (nr. 37-40) bevat in 723 pagina's een schat aan informatie in 46 artikelen, 39 pagina's boekbespreking en een zoekersrubriek van 78 pagina's.
Het eerste nummer is geheel gewijd aan het driedaags congres van de VVWL in juli 1983, met als thema: Wiskunde-onderwijs nu voor morgen. De 14 artikelen in dit nummer zijn de verslagen van de voordrachten op dit congres gehouden, variërend van een historische ontwikkeling van het begrip natuurlijk getal (Vredenduin), logo (3 artikelen), cryptografie, artificiële intelligentie (Devijver), computers in de basisschool (Bynes), lineair denken (matrices en vergelijkingen), van de regel van drieën tot puntenwolk van Galton, waarin correlatie en regressie op duidelijke wijze belicht worden, inleiding tot de studie van distributies, alsmede enige didactische onderwerpen zoals differentiëren door individuele taken, het stellen van toetsvragen en wiskunde onderwijs aan migranten leerlingen.
Een zoekersrubriek van 14 pagina's besluit dit nummer. René Laumen verzorgt deze rubriek, waarin enige problemen aan de lezers worden voorgelegd, vergelijkbaar met de recreatierubriek van Vredenduin in Euclides. Het verschil is dat de redacteur de lezers verzoekt hun oplossingen in te zenden, die dan in een volgend nummer besproken worden met de namen van de goede oplossers.
Het tweede nummer bevat de verslagen van de VVWL-studiedag in oktober 1983 over de spilmethode, over equivalentieklassen en over de vraag of wiskunde niet boeiend kan zijn. Verder artikelen over de stelling van Pythagoras, homothetie, talstelsels, partiële orderelaties, complexe getallen en dubbelverhoudingen.
Een uitvoerige boekbespreking, bespreking van enige tijdschriften (o.a. Euclides), de zoekersrubriek en de Nederlandse Wiskunde Olympiade besluiten dit nummer.
Het derde nummer bevat verslagen van de jaarvergadering, van de gemeenschappelijke studiedag van de VVWL en de NVvWL en de november studiedag van de VVWL over de programmeertaal Pascal (een monografie Pascal is verkrijgbaar).
Verder artikelen over de simplexmethode, ruimtemeetkunde en reële functies, gevolgd door een boekbespreking en de zoekersrubriek.
Het laatste nummer van deze jaargang bevat de verslagen van de voordrachten gehouden op de studiedag van mei 1984 over reële functies, bigroepen en de groepstructuur als basis van muzikaal denken.
Verder artikelen over problem-solving, Egyptische wiskunde,

periodelengte en talstelsels, en wiskundig denken als selecterende factor voor studie- en beroepskeuze.
In de boekbespreking o.a. de syllabus van de Nederlandse vakantiecursus 1983. Ook bevat dit nummer een aardig kruiswoordraadsel voor enthousiaste rekenaars.
Samenvattend kan men concluderen dat een abonnement op Wiskunde en Onderwijs, begrepen in het gereduceerde lidgeld van de VVWL voor leden van de NVvWL, voor lezers van Euclides een welkome aanvulling kan zijn op de boekenplank van de Nederlandse wiskundeleraar als inspiratie- en ontspanningsbron.

H. N. Schuring

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, 6865 HN Doorwerth.

Oplossingen

527 Voor n jongens en n meisjes geldt: als elke k jongens voor minstens k meisjes genegenheid koesteren, dan is het mogelijk n huwelijken te sluiten zo dat elke jongen trouwt met een meisje dat bij hem in de smaak valt.
Voor nadere bijzonderheden zie het vorige nummer. Daar stond ook een, helaas foutief, bewijs van deze stelling. De fout school in de regels 6-9.
Nu een beter bewijs. We vormen paren affectief gebonden jongens en meisjes, todat ons dat niet verder lukt. Onderstel dat deze paren zijn jongen 1-meisje 1 tot en met jongen 8-meisje 8.
Jongen 9 voelt genegenheid voor meisje 7, jongen 7 voor meisje 4, jongen 4 voor meisje 5 en jongen 5 voor meisje 9. We veranderen dan de situatie links in de situatie rechts.

j	m	j	m
1	1	1	1
2	2	2	2
3	3	3	3
4	4	6	6
5	5	8	8
6	6	4	5
7	7	5	9
8	8	7	4
9	9	9	7

Het aantal huwbare paren is zo met 1 vermeerderd.
Kunnen we zo steeds doorgaan of stopt dit proces op een bepaald ogenblik? Onderstel het stopt. We krijgen dan een situatie van de volgende soort.

j	m
1	1
2	2
...	
9	9
10	10
11	11
12	12
13	13
14	

Jongen 14 houdt van meisje 12 en 13 en van geen andere, jongen 13 alleen van 13, jongen 12 van 11, 10 en 9, jongen 11 alleen van 11, jongen 10 van 10 en 11, jongen 9 alleen van 9.
De zes jongens 9, 10, 11, 12, 13 en 14 zijn nu affectief verbonden met de vijf meisjes 9, 10, 11, 12, 13 en met geen andere. Dit is in strijd met de onderstelling. Waarmee aangetoond is dat de paarvorming voortgezet kan worden, totdat alle jongens eenduidig een partner gevonden hebben.

528 Negen kamerdeuren hebben de volgende opschriften.

1	2	3
de dame zit in een kamer met oneven nummer	deze kamer is leeg	bord 5 is waar of bord 7 onwaar
4	**5**	**6**
bord 1 is onwaar	bord 2 of bord 4 is waar	bord 3 is onwaar
7	**8**	**9**
de dame zit niet in kamer 1	in deze kamer zit een tijger en kamer 9 is leeg	in deze kamer zit een tijger en bord 6 is onwaar

In één van deze kamers zit een dame, in de overige een tijger of niets. Het opschrift van de kamer met de dame is waar, die van de kamers met een tijger onwaar en die van de lege waar of onwaar.
Een veroordeelde moet trachten de kamer met de dame te vinden. Hij vraagt daartoe nog: is kamer 8 leeg? Na verkregen antwoord ziet hij kans de dame te localiseren. Hoe?
Het antwoord op de vraag of kamer 8 leeg is, heeft blijkbaar extra informatie gegeven. Het antwoord is dus geweest: de kamer is niet leeg.
Nu redeneert de veroordeelde als volgt.
In kamer 8 zit een tijger.
Bord 8 is onwaar.
Kamer 9 is niet leeg.
In kamer 9 zit een tijger.
Bord 6 is waar.
Bord 3 is onwaar. (1)
Bord 5 is onwaar en bord 7 is waar. (2)
Bord 2 is onwaar en bord 4 is onwaar.
Bord 1 is waar. (3)
De dame zit niet in kamer 1. (wegens (2))
De dame zit niet in kamer 3 en niet in kamer 5. (wegens (1) en (2))
De dame zit in een kamer met een oneven nummer. (wegens (3))
De dame zit in kamer 7.
Wie de structuur van de puzzel wil doorzien, raad ik aan nog de volgende vragen te beantwoorden.
Was het inderdaad onmogelijk zonder verdere informatie uit te vinden in welke kamer de dame was?
In welke kamers zou de dame dan kunnen zijn?
De veroordeelde vraagt extra informatie. De vraag houdt echter risico in. Als het antwoord luidt: kamer 8 is leeg, dan kan hij de dame nog niet localiseren. Is er geen soortgelijke, maar betere vraag te bedenken waardoor het risico verkleind wordt?

Inhoud

Adressen van auteurs

H. G. B. Broekman, PDI, RU Utrecht, Heidelberglaan 2, 3584 CS Utrecht

J. M. J. Weterings, Elzas 44, 3524 RX Utrecht

P. Vredenduin, Dillenburg 148, 6865 HN Doorwerth

J. Chr. Perrenet, Groenburgwal 11, 1011 HR Amsterdam

J. van IJzeren, T.H. Eindhoven, Onderafdeling Wiskunde en Informatica, Postbus 513, 5600 MB Eindhoven